Cours de mathématiques

Vincent-Xavier Jumel

Juillet 2021

Table des matières

Version	**Date**	**Auteur(s)**	**Modifications**
0.9	2021-07-05	VXJ	Version initiale
0.91	2021-07-06	VXJ	Reprise du chapitre sur les suites

Notations

Je donne ici quelques notations utilisées dans le cadre des cours, aussi bien dans la version distribuée que dans la version utilisée en classe.

On note par **N**, les entiers naturels, c'est à dire les nombres 0,1,2,3,... **R** désigne l'ensemble des nombres réels, c'est à dire tous les nombres utilisables correspondant à l'abscisse d'un point d'une droite [1]. De façon générale, les ensembles usuels sont notés en gras dans les documents informatiques et avec une «double barre» lorsqu'on écrit à la main. On écrira donc $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ au tableau et sur les copies, le gras étant complexe à rendre en écriture manuscrite.

On note les applications, c'est à dire les correspondances entre deux ensembles avec des lettres minuscules (u, v, f, g). Ainsi, il convient de faire attention au contexte. Suivant les cas, u peut représenter une suite ou une fonction.

Le choix des variables importe :

- pour des entiers, on privilégiera n, p, q, en évitant m qui risque de se confondre avec n ;
- pour des réels, on choisira x, y, z, t.

Mathématiques approfondies

L'objectif de l'enseignement de mathématiques approfondies est de préparer la personne étudiante à d'éventuelles poursuites d'études et à la familiariser aux calculs correspondants avec sa calculatrice et d'autres moyens informatiques, et à interpréter les résultats ainsi obtenus. À nouveau, l'utilisation des moyens informatiques (calculatrice, ordinateur) est recommandée pour faciliter la compréhension de concepts par des illustrations graphiques et numériques et pour des calculs non élémentaires.

Les exemples et exercices reposent sur des situations de la vie courante ou issues des autres disciplines. La compréhension d'une modélisation et son interprétation seront jugées plus importante qu'une agilité calculatoire.

Le programme est constitué des modules suivants décrits par le programme de mathématiques des brevets de technicien supérieur (arrêté du 4 juin 2013) :

- Suites numériques ;
- Fonctions d'un variable réelle, à l'exception de l'item «Fonctions sinus et cosinus» et des paragraphes «Approximation locale d'une fonction» et «Courbes paramétrées» ;
- Calcul intégral, à l'exception de l'item «Compléments : primitives de $t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $t \longmapsto \sin(\omega t + \varphi)$» du paragraphe «Primitives» et de l'item «Formule d'intégration par parties» du paragraphe «Intégration» ;
- Statistique descriptive ;
- Probabilités 1, à l'exception de l'item «Théorème de la limite centrée» ;
- Probabilités 2, à l'exception du paragraphe «Exemple de processus aléatoires».

1. La définition est en réalité bien plus complexe.

CHAPITRE 1

Suites numériques

1.1 Généralités

1.1.1 Définition

Définition 1.1. Une suite numérique est une «collection infinie» de nombres numérotées à partir de 0.
On représente une telle suite par une lettre, définissant la suite dans son ensemble et on note u ou $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
u_n s'appelle le *terme général* de la suite u.

Exemple. ▹ *La suite des nombre entiers ;*
▹ *la suite des entiers pairs ;*
▹ *la suite des nombres premiers ;*
▹ *la suite de terme général $p_n = \pi^n$;*
▹ ...
sont des suites numériques.

Attention : bien noter u_n et non *u*n.

Remarque. Une «collection finie» s'appelle une *séquence* ou une *famille*.

Définition 1.2. Soit a un nombre réel. On appelle suite constante de terme général a la suite dont tous les termes valent a.
Si $a = 0$, on parle alors de suite nulle.
Par abus de notation, on confond les réels a et les suites constantes de terme général a.

Définition 1.3.

▹ On appelle *suite arithmétique* de premier terme u_0 et de raison r toute suite définie par u_0 et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
▹ On appelle *suite géométrique* de premier terme v_0 et de raison q toute suite définie par v_0 et $\forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+1} = v_n \times q$

Remarque. Cette définition est tout à fait compatible avec la définition 1.2.

Définition 1.4. On dit qu'une suite est croissante, respectivement décroissante, lorsque pour tout n entier naturel, $u_n \leq u_{n+1}$, respectivement $u_{n+1} \leq u_n$.
Lorsque les inégalités sont strictes ($<$ ou $>$), on dit strictement croissante ou strictement

décroissante.
Si les premiers termes de la suite ne sont pas ordonnées, on dit que la suite est croissante, respectivement décroissante, à partir d'un certain rang. On a alors, pour tout n entier naturel, il existe un rang n_0, tel que si $n \geq n_0$, alors $u_n \leq u_{n+1}$.
Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

Proposition 1.5.

- *u est croissante si et seulement si, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.*
- *Si u est à valeurs strictement positives, u_n est croissante si et seulement si, pour tout n entier naturel, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.*

Démonstration.

- Laissée en exercice.
- Laissée en exercice.

□

Définition 1.6. Soit E un ensemble de nombres, par exemple $E = \{u_n \,/\, n \in \mathbf{N}\}$

- On dit que m est un **minorant** de E (ou de la suite), lorsque, pour tout $x \in E$, $m \leq x$. On dit alors que E (ou la suite) est **minorée**.
- On dit que M est un **majorant** de E (ou de la suite), lorsque, pour tout $x \in E$, $x \leq M$. On dit alors que E (ou la suite) est **majorée**.
- Un ensemble qui est à la fois majoré et minoré est dit **borné**.

Remarque. On peut parfois parler de minoration (ou majoration) par une suite termes à termes, lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$. On note alors, abusivement $u \leq v$.

Définition 1.7. Soient u et v deux suites de terme général u_n et v_n.

- La suite $u + v$ est la suite de terme général $u_n + v_n$
- La suite uv est la suite de terme général $u_n \times v_n$.

Proposition 1.8. *Si u et v sont deux suites croissantes, alors $u + v$ est croissante et, si de plus, u et v sont à valeurs positives, uv est croissante.*

Démonstration. Si u est croissante, alors $u_{n+1} - u_n \geq 0$. De même, si v est croissante, $v_{n+1} - v_n \geq 0$. Il vient donc que $u_{n+1} - u_n + v_{n+1} - v_n \geq 0$ et donc $(u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n) \geq 0$.

Soient u et v deux suites croissantes, à valeurs strictement positives. On a alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1$ d'où $\frac{u_{n+1}v_{n+1}}{u_n v_n} \geq 1$. □

1.1.2 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un mode de raisonnement particulier aux entiers naturels, ou aux éléments d'une suite indexée par les entiers naturels. Il permet en particulier de montrer une propriété sur tous les éléments d'une suite, en vérifiant la propriété sur le premier élément de la suite, puis en montrant que supposer la propriété vraie pour un élément quelconque entraîne que la proposition est vraie pour l'élément suivant.

Théorème 1.9. *Soit $\mathcal{P}_n$ une proposition indexée par n. Si $\mathcal{P}_0$ est vraie et si $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$, alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.*

Ce théorème est un axiome de la théorie des entiers naturels proposée par Guieseppe Peano.

Exemple. *Démontrons que la somme des entiers naturels de 0 à n s'écrit* $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
Soit $\mathbb{P}_n$ *la proposition* «$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$».
La somme s'initialisant à 0, on a, pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^{0} = 0$ *et* $\frac{0\times(0+1)}{2} = 0$*. La proposition* $\mathbb{P}_0$ *est donc vraie.*
Soit n un entier arbitrairement choisi. Supposons $\mathbb{P}_n$ *vraie et démontrons* $\mathbb{P}_{n+1}$*.* $\mathbb{P}_n$ *vraie s'écrit* $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

On peut conclure que, pour tout n entier naturel, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Rédiger une démonstration par récurrence

Pour rédiger une démonstration par récurrence, il faut :

- bien identifier la proposition $\mathbb{P}_n$ et l'écrire explicitement ;
- écrire l'étape d'**initialisation**, c'est-à-dire la vérification de la proposition au rang initial ;
- écrire l'étape d'**hérédité**, en mentionnant l'usage de la proposition $\mathbb{P}_n$, appelée ici **hypothèse de récurrence** ;
- écrire la **conclusion**.

1.1.3 Quelques méthodes sur les suites

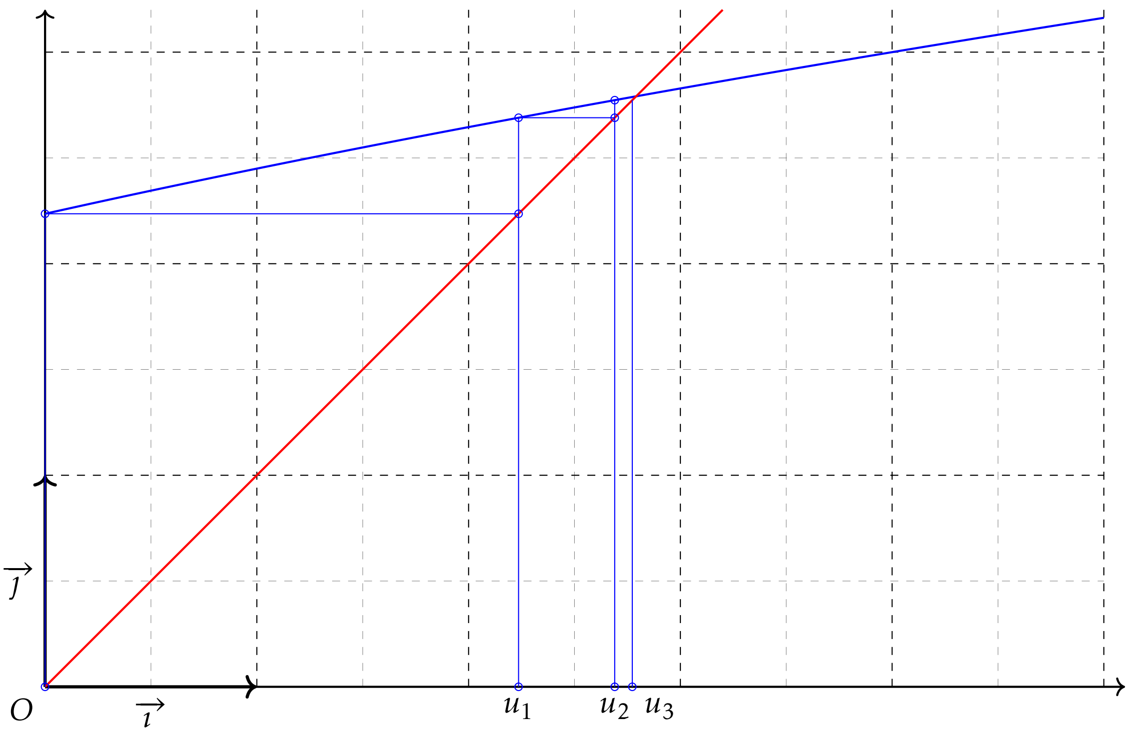
Écrire un algorithme de calcul des termes d'une suite définie par une relation de récurrence.

$U \leftarrow$ valeur initiale
$N \leftarrow 0$
Tant que $N <$ seuil
    $U \leftarrow$ expression contenant U
    $N \leftarrow N + 1$

Tracer les points d'une suite définie par une relation de récurrence.

Soit u définie par u_0 et pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
- Tracer, dans le même repère, la droite d'équation $y = x$.
- Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
- Reporter cet abscisse sur la courbe de la fonction f.



1.2 Limite d'une suite

1.2.1 Limite finie d'une suite

Définition 1.10. On dit qu'une suite u admet une limite finie ℓ lorsque tous les intervalles ouverts contenant ℓ contiennent tous les termes de u_n, à partir d'un certain rang.

On dit alors que ℓ est la limite de la suite et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
On dit que la suite **converge** vers ℓ.

Cette définition peut écrire $\forall(a,b) \in \mathbf{R}^2,\ a < b$, tels que $\ell \in]a,b[,\ n \geq n_0 \implies u_n \in]a,b[$. Une façon de prendre a et b respectant ces conditions est de se fixer un nombre quelconque, $\varepsilon > 0$ et de prendre $a = \ell - \varepsilon$ et $b = \ell + \varepsilon$.

Proposition 1.11. *Si une suite converge, alors sa limite est unique.*

Démonstration. Soit u une suite convergente. Raisonnons par l'absurde. On suppose qu'il existe ℓ_1 et ℓ_2 deux limites distinctes. Supposons de plus que $\ell_1 < \ell_2$ et posons $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3}$.
Tous les intervalles I contenant ℓ_1 contiennent tous les termes de la suite. De même, tous les intervalles J contenant ℓ_2 contiennent tous les termes de la suite.
Or, par construction, si $u_n \in I$, alors $u_n \notin J$ et réciproquement, si $u_n \in J$, alors $u_n \notin I$.
Il y a donc contradiction et celle-ci existe toujours si $\ell_1 > \ell_2$.
Donc $\ell_1 = \ell_2$ et la limite est unique. □

Remarque. La définition assure que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.

Exercice 1.1

Montrer que la suite u définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1 converge vers 0.

Solution 1.1

Soient a et b deux nombres positifs, $a < b$ et $I =]a,b[$. $u_n \in I \iff -a < u_n < b \iff -a < \frac{1}{n} < b$.
Les termes de la suite étant positifs, cette dernière inégalité est équivalente à $\frac{1}{n} < b \iff n > \frac{1}{b}$.
Ainsi, à partir du rang $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{b} \right\rfloor$[a], les termes de la suite u_n sont dans I.
La suite converge bien vers 0.

[a]. La fonction $\lfloor\cdot\rfloor$ est la fonction partie entière qui est l'entier immédiatement en dessous de son argument.

Cet exemple est assez fondamental, il permet de montrer la convergence de la suite de terme général $\frac{1}{n}$. De la même façon, on pourrait démontrer, après conjecture de la limite, la convergence des suites de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}^k}$, où $k \in \mathbf{N}^*$.

Proposition 1.12. *Soient u une suite convergente et a un nombre réel. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + a = \ell + a$ et $\lim_{n\to+\infty} a \times u_n = a\ell$*

Démonstration. Si u est convergente, alors tous les intervalles contenant ℓ contiennent tous les termes u_n à partir d'un certain rang. Par translation (ou par homothétie), tous les intervalles contenant $\ell + a$ (ou $a\ell$) contiennent tous les termes de $u_n + a$ (ou au_n) à partir d'un certain rang. □

Corollaire 1.13. *Si la suite u converge vers ℓ, alors la suite de terme général $u_n - \ell$ converge vers 0.*

Démonstration. Il s'agit d'une application directe du théorème précédent. □

La comparaison à 0 permet de simplifier des raisonnements et de ne considérer que le cas des suites convergentes vers 0 pour les calculs de limites.

Proposition 1.14. *Soient u et v deux suite convergente de limites* ***finies*** *ℓ_1 et ℓ_2. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n \times v_n = \ell_1 \times \ell_2$.*

Démonstration. Soient u et v deux suites convergentes. Posons $u' = u - \ell_1$ et $v' = v - \ell_2$. Les suites u' et v' convergent vers 0.
Dans ce cas, tous les intervalles contenant 0 contiennent tous les termes de la suite u' à partir d'un certain rang n_1 et ils contiennent tous les termes de la suite v' à partir d'un certain rang n_2. Ainsi, à partir du rang $n = \max(n_1, n_2)$, ils contiennent tous les termes de la suite $u' + v'$. D'où la suite $u + v$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$.
Plus précisément, on peut d'ailleurs considérer que les intervalles de rayon [1] inférieur à 1, et on obtient aussi que $u'v' - \ell_1\ell_2$ tend vers 0. □

La proposition 1.14 permet en particulier de déterminer des limites de suites dans le cas d'une limite finie. On peut en particulier, en utilisant la proposition 1.12, admettre que les suites de la forme $(u_n)_{\mathbf{N}}\frac{a}{n}$, $(u_n)_{\mathbf{N}}\frac{a}{n^2}$, $(u_n)_{\mathbf{N}}\frac{a}{n^3}$ ou $(u_n)_{\mathbf{N}}\frac{a}{\sqrt{n}}$ ont pour limite 0, et ce pour tout a réel.

1.2.2 Limite infinie d'une suite

Définition 1.15. Soit u une suite.
On dit que celle-ci a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
On dit que celle-ci a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]-\infty A[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

On dit parfois que la suite diverge vers $+\infty$

Exemple. *La suite de terme général $u_n = \sqrt{n}$ a pour limite $+\infty$.*
Soit A un réel positif. $u_n > A \iff \sqrt{n} > A \iff n > A^2$. À partir du rang $n_0 = \lfloor A^2 \rfloor + 1$, les termes de la suite u sont dans les intervalles de la forme $]A, +\infty[$.

De façon générale, on peut démontrer que les suites de terme général $a(\sqrt{n})^k$, $a \in \mathbf{R}_+^*$, $k \in \mathbf{N}^*$ convergent vers $+\infty$.

Proposition 1.16. *Soient a un réel non nul et u une suite divergente vers $+\infty$. Alors la suite $u + a$ diverge aussi vers $+\infty$ et la suite $a \times u$ diverge vers $+\infty$ si $a > 0$ et vers $-\infty$ si $a < 0$.*

Démonstration. Comme u a pour limite $+\infty$, tous les intervalles de la forme $]A, +\infty[$ contiennent tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On en déduit que les intervalles de la forme $]A + a, +\infty[$ contiennent une infinité de termes $u_n + a$.
Traitons le cas $a < 0$. Comme u a pour limite $+\infty$, tous les intervalles de la forme $]A, +\infty[$ contiennent tous les termes u_n à partir d'un certain rang. Les intervalles de la forme $]-\infty a \times A[$ contiennent donc tous les termes $a \times u_n$ et donc la limite de $a \times u$ est $-\infty$. □

1. La demi différence des extrémités de l'intervalle.

Proposition 1.17. *Soient u une suite qui diverge vers $+\infty$ et v une suite de limite **finie** ℓ. Alors la suite $u+v$ diverge vers $+\infty$.*

Démonstration. Admis □

Proposition 1.18. *Soient u une suite qui diverge vers $+\infty$ et v une suite de limite **finie** ℓ **non nulle.** Supposons de plus $\ell > 0$. Alors la suite uv diverge vers $+\infty$.*

Démonstration. Admis □

Proposition 1.19. *Soit u une suite qui diverge vers $+\infty$. Alors la suite $\frac{1}{u}$ converge vers 0.*

Démonstration. Admis □

1.2.3 Suites ne possédant pas de limites ou ne pouvant être déterminées facilement

Suites ne possédant pas de limites

Certaines suites, comme la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ ne possède pas de limite. En effet, les seuls valeurs possibles pour la limite sont 1 et -1. Supposons que 1 soit la limite de la suite u. Prenons l'intervalle $]0, 2[$. Il contient 1, mais ne contient pas -1. Donc 1 n'est pas limite de la suite u. En appliquant ce même raisonnement à -1, on montre que -1 n'est pas non plus limite de la suite u. □

De même, les opérations sur les limites sont délicates lorsque les deux suites possèdent pour limite $\pm\infty$ ou 0. Les tableaux ci-dessous récapitule les limites calculables. Le sigle F.I. signifie forme indéterminée.

u a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
v a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$u+v$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Pour le produit, on donne aussi le tableau suivant, pour $\ell \neq 0$ et $\ell' \neq 0$:

u a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
v a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$u \times v$ a pour limite	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Attention, dans le cas où $\ell = 0$, on a des formes indéterminées :

u a pour limite	0	0	0
v a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
$u \times v$ a pour limite	0	F.I.	F.I.

Pour le quotient, on a toujours dans le cas où $\ell \neq 0$ et $\ell' \neq 0$:

u a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
v a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	ℓ'	ℓ'
$\frac{u}{v}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$

Les formes $\frac{0}{0}$, $0 \times \pm\infty$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ sont aussi des formes indéterminées. Cependant, il n'est pas nécessaire de faire apparaître cette information.

Lever une indétermination

Pour lever une indétermination, dans une somme ou une différence, on essaie d'écrire la limite sous la forme d'un produit en factorisant par le terme de plus haut degré.
Pour lever une indétermination dans le cadre d'un quotient, on essaie également de simplifier après avoir factorisé par le terme de plus haut degré.

1.3 Comparaison des suites

1.3.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 1.20. *Soient u et v deux suites telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$*

Démonstration. u diverge vers $+\infty$, donc tous les intervalles de la forme $]A, +\infty[$ contiennent tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_1. On a plus précisément même, à partir d'un certain rang, $A < u_n \leq v_n$. Donc tous les intervalles de la forme $]A, +\infty[$ contiennent tous les termes v_n à partir d'un certain rang. □

Ce théorème est pratique pour démontrer la divergence d'une suite dans les cas d'indétermination.

Exercice 1.2

u et v sont les suites définies sur $\mathbf{N}$ par $u_n = \sqrt{n^4 + 3n}$ et $v_n = n^2$.

1. Étudier quelques valeurs de $u_n - v_n$ et conjecturer une comparaison.
2. Démontrer cette conjecture.
3. En déduire la limite de la suite u.

Théorème 1.21 (d'encadrement)**.** *Soient u, v et w trois suites telles qu'à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$. Si $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.*

Démonstration. Admis □

Ce théorème permet d'obtenir souvent des limites de suites dans des cas d'indétermination.

Exercice 1.3

u est la suite définie pour tout nombre entier $n \geq 1$ par $u_n = \frac{(-1)^n \sin n}{n^3}$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{-1}{n^3} \leq u_n \leq \frac{1}{n^3}.$$

2. En déduire la limite de la suite u.

1.3.2 Inégalité de Bernoulli et conséquences

Proposition 1.22 (Inégalité de Bernoulli). *Soit un réel $a > 0$. Pour tout entier n,*

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Démonstration. Par récurrence. Soit $\P_n$ la proposition «$(1+a)^n \geq 1+na$».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$. On a donc bien $(1+a)^0 \geq 1+0\times a$ et donc $\P_0$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit n un entier naturel arbitrairement choisi. Supposons $\P_n$ vraie.
  $(1+a)^n \geq 1+na \implies (1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$.
  $(1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+a^2$. Or $a^2 > 0$, on obtient donc $(1+na)(1+a) \geq 1+(n+1)a$ ce qui achève l'hérédité.
- **Conclusion :** $\forall a \in \mathbf{R},\ a > 0,\ \forall n \in \mathbf{N},\ (1+a)^n \geq 1+na$

□

L'intérêt principal de cette proposition est de fournir un résultat générique concernant les suites géométriques.

Proposition 1.23. *Soit u une suite géométrique de raison $q > 1$ et de premier terme $u_0 > 0$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Démonstration. u étant une suite géométrique, son terme général est $u_n = u_0 q^n$. $q > 1$ s'écrit $q = 1+a$, avec $a > 0$. D'après l'inégalité de Bernoulli 1.22, $u_n \geq u_0(1+na)$.
La suite de terme général $u_0(1+na)$ est une suite qui diverge vers $+\infty$, et en utilisant le théorème 1.20, on obtient que u_n diverge vers $+\infty$. □

📎Expression explicite des suites arithmétiques et géométriques

- Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 a pour terme général $u_n = u_0 + rn$.
- Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 a pour terme général $u_n = u_0 q^n$.
  La démonstration se fait par récurrence sur n.

Corollaire 1.24. *Soit u une suite géométrique de raison $0 < q < 1$. Alors*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Démonstration. Soit u une suite géométrique de raison q, $0 < q < 1$. Considérons $v = \frac{1}{u}$ la suite géométrique de raison $\frac{1}{q}$. On a $1 < \frac{1}{q}$ et donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. □

Exercice 1.4

Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$.
Déterminer la somme $\sum_{i=0}^{N} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_N$ des N premiers termes de la suite.

Solution 1.4

Notons S cette somme. $S = u_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^N)$ et $qS = u_0(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{N+1})$.
Calculons la différence $S - qS$.
$S - qS = u_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^N) - u_0(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{N+1}) = u_0(1 + q - q + q^2 - q^2 + q^3 - \ldots + q^N - q^{N+1}) = u_0(1 - q^{N+1})$. On obtient ainsi $S(1 - q) = u_0(1 - q^{N+1})$. D'où $S = u_0 \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$.

Proposition 1.25. *La série [2] géométrique converge si $0 < q < 1$ et vaut $\frac{u_0}{1-q}$.*

Démonstration. La preuve est dans la solution de l'exercice 1.4 □

1.3.3 Suite croissante

Proposition 1.26. *Soit u une suite. Si u est croissante et converge vers ℓ, alors tous ses termes sont inférieurs ou égaux à ℓ.*

Démonstration. Soit u une suite croissante convergente. Raisonnons par l'absurde. On suppose qu'il existe un rang p tel que $u_p > \ell$. Il existe donc un réel $\beta > 0$, $u_p = \ell + \beta$.
Comme u est croissante, pour $n \geq p$, $u_n \geq u_p$.
Comme u est convergente, tous les u_n sont dans un intervalle de la forme $]\ell-, \alpha\ell+, \beta[$ pour $\alpha > 0$.
On devrait donc avoir simultanément, à partir d'un certain rang, $u_n \geq u_p$ et $u_n < u_p$, ce qui est contradictoire. L'hypothèse de l'existence d'un rang qui dépasse la limite est fausse et donc sa négation est vraie. □

Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement mis en œuvre ici est dit par l'absurde. Il consiste à ajouter comme hypothèse la négation de la conclusion. On montre ainsi que la proposition et la négation de sa conclusion ne peuvent être vraie simultanément. Comme c'est le fait d'avoir ajouter une hypothèse qui rend le tout impossible, la négation de cette hypothèse est donc vraie. Ce type de raisonnement est connu depuis l'antiquité, il est ainsi utilisé par Euclide pour démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers. Il repose sur le principe dit du

2. La somme infinie des termes d'une suite

«tiers exclu» qui postule qu'une assertion est soit vraie, soit fausse.

Les théorèmes suivants permettent de conclure sur la convergence des suites.

Théorème 1.27 (convergence monotone)**.**

- *Toute suite strictement croissante majorée converge.*
- *Toute suite strictement décroissante minorée converge.*

Démonstration. Admis □

Ce théorème est particulièrement utile pour les suites définies par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Utiliser le théorème de convergence monotone.

Soit u une suite définie par u_0 et une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ Si un exercice propose de démontrer successivement que

- la suite est majorée ou minorée ou bornée ;
- la suite est croissante ou décroissante.

Alors on peut certainement utiliser le théorème de convergence monotone.

Remarque. Attention, ce théorème ne donne pas la limite. Il donne au plus un majorant (ou un minorant) de la limite.

Corollaire 1.28. *Toute suite strictement croissante non-majorée diverge vers* $+\infty$*.*

Démonstration. Soit u une suite strictement croissante non majorée. On peut vérifier que tous les termes de la suite sont sont dans les intervalles $]u_n, +\infty[$ à partir du rang $n+1$. Donc la suite est divergente. □

1.4 Exercices

Exercice 1.5

Donner le terme général des suites :

1. arithmétique, de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$
2. géométrique, de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1024.
3. récurrente, définie par $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = 1$.

Exercice 1.6

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 3$, $2^n > 2n$.

Exercice 1.7

u est la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout n entier naturel,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}.$$

1. Calculer explicitement les premiers termes.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 < u_n < 3$
3. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$.

Exercice 1.8

u est la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{7u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 7$.
2. Démontrer par récurrence que la suite u_n est décroissante.

Exercice 1.9

u est la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $u_n \geq 0$.
2. Démontrer par récurrence que la suite u_n est décroissante.

Exercice 1.10

Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $2^n \geq n+1$.

Exercice 1.11

Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier $n \geq 2, 4^n \geq 4n+1$.

Exercice 1.12

Programmer cet algorithme sur la calculatrice, puis avec le langage Python.

Exercice 1.13

Construire les graphiques pour les exercices 1.8 et 1.9.

Exercice 1.14

Démontrer que la suite u définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0.

Exercice 1.15

Démontrer que la suite v définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = 2 + \frac{1}{n}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 1.16

Indiquer si les suites convergent et éventuellement leur limite.

1. u de terme général $(-1)^n$
2. u de terme général $\frac{1}{n}$
3. u de terme général $\frac{x^n}{n!}$ avec x un nombre réel
4. u de terme général $\sin n\pi$

Exercice 1.17

Montrer que la suite définie par $u_n = 3n - 10$ pour $n \in \mathbf{N}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 1.18

Montrer que la suite définie par $v_n = n^2$ pour $n \in \mathbf{N}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 1.19

Montrer que la suite définie par $w_n = 2n^2 - 7$ pour $n \in \mathbf{N}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 1.20

1. Déterminer la limite de la suite de terme général $n^3 - 3n^2 + n$.
2. Déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{n-1}{n+1}$

Étudier les limites des suites définies sur $\mathbf{N}$.

Exercice 1.21

$u_n = n^2 + 5n - 100$

Exercice 1.22

$v_n = \frac{-2}{n+3}$

Exercice 1.23

$w_n = -n^3 + 6n + 3$

Exercice 1.24

$z_n = 2n - \sqrt{n}$

Exercice 1.25

$t_n = (n^2 - n + 1)\sqrt{n}$
Étudier la limite de la suite

Exercice 1.26

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{n}{n^2+3}$

Exercice 1.27

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \frac{n^2+n+1}{n+1}$

Exercice 1.28

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $w_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$

Exercice 1.29

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, $z_n = \frac{5n}{1-n}$

Exercice 1.30

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $t_n = n + \frac{5}{n+1}$

Exercice 1.31

u est la suite définie par $u_0 = 75$ et pour tout nombre entier naturel, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 50$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} \leq 125$.
2. En déduire que la suite converge vers un nombre ℓ.
3. Expliquer pourquoi ℓ est la solution de l'équation $x = 0{,}6x + 50$. En déduire la limite de la suite u.

Exercice 1.32

u est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$

1. Démontrer que pour tout n, $u_n > 0$ et en déduire que la suite est croissante.
2. Montrer que si u est majorée, alors elle converge vers un nombre réel négatif.
3. Montrer que u n'est pas majorée et déterminer sa limite.

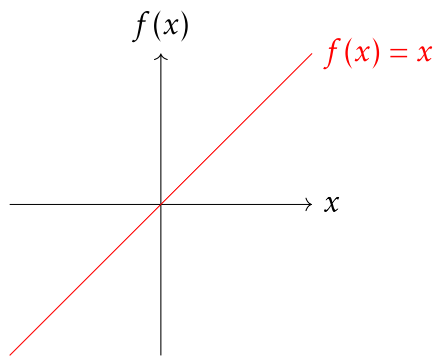
CHAPITRE 2

Fonctions d'une variable réelle

2.1 Fonction linéaire et affine

2.1.1 Fonction linéaire

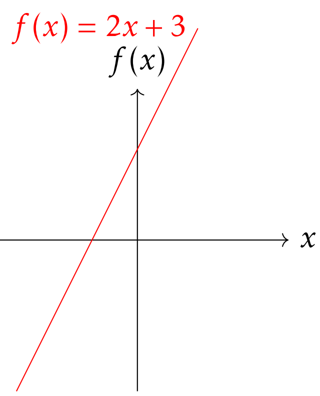
Une fonction linéaire est une fonction $f : x \mapsto ax$, où a est un nombre réel non nul.



La représentation graphique d'une telle fonction est une droite passant par l'origine. Le nombre a est le coefficient directeur de cette droite et est aussi appelé « pente ».

2.1.2 Fonction affine

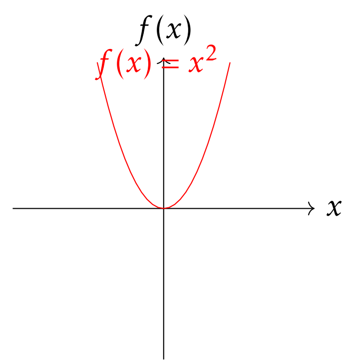
Une fonction affine est une fonction linéaire « décalée » (verticalement de b ou horizontalement de $-\frac{b}{a}$. Si a et b sont deux nombres réels, on note $f : x \mapsto ax + b$.



La représentation graphique d'une telle fonction est une droite.

2.2 Fonction carrée

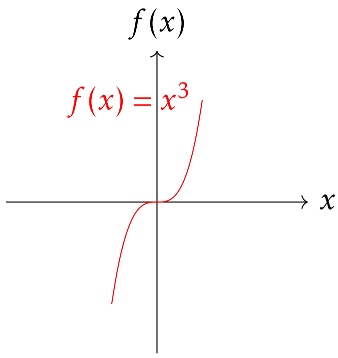
La fonction carrée de référence est la fonction $f : x \mapsto x^2$. Cette fonction est dite paire, c'est à dire que pour tout x réel, $f(x) = f(-x)$.



La représentation graphique est une parabole symétrique par rapport à l'axe Oy des ordonnées.

2.3 Fonction cube

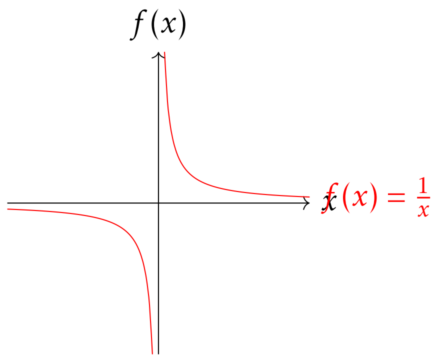
La fonction cube de référence est la fonction $f : x \mapsto x^3$. Cette fonction est dite impaire, c'est à dire que pour tout x réel, $f(x) = -f(-x)$.



La représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

2.4 Fonction inverse

La fonction inverse est la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, définie pour $x \neq 0$. On dit parfois que le domaine de définition est $\mathbf{R}^*$.



Exercice 2.1

1. f est définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{x-2}$

a) Déterminer $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)$
b) Préciser le signe de $(x-2)$ sur $]2\,;+\infty[$
c) Déterminer $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$

2. f est définie sur l'intervalle $I =]-\infty\,;-1[$ par $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

a) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
b) Préciser le signe de $(x+1)$ sur I.
c) Déterminer $\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)$

3. f est définie sur $]3\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$.

a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
b) Déterminer $\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)$

Exercice 2.2

Donner les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$
2. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
3. $f(x) = -\frac{4}{3}x^4 - 3x^2 + \frac{1}{3}$

Exercice 2.3

Donner les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$
2. $f(x) = \frac{x^3+1}{2x^2+x+1}$
3. $f(x) = \frac{2x^2-1}{4x^2+5}$

Exercice 2.4

Déterminer $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$
Indication : Mettre $(x-1)$ en facteur au numérateur et au dénominateur.

Exercice 2.5

1. f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 - \frac{1}{x}$$

a) Étudier $\lim_{x\to0} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}$.
b) i) Montrer que la droite D d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
ii) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

2. f est définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par :

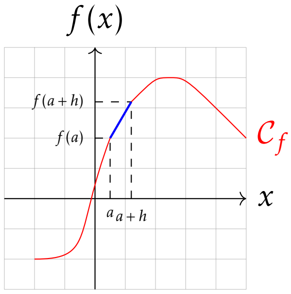
$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

a) Étudier $\lim_{x\to1} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}$.
b) i) Vérifier que, pour $x > 1$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$. En déduire que la droite D d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
ii) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

2.5 Nombre dérivé

2.5.1 Une définition du nombre dérivé

Soit $x_0 \in I$ et h un petit nombre tel que $x_0 + h \in I$. Le taux d'accroissement de la fonction f en x_0 est $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
L'accroissement de la fonction se traduit graphiquement :



La courbe est approchée par une portion de droite. Plus la quantité h est «petite», plus on approche la courbe par des portions de droites. On peut introduire le nombre dérivé

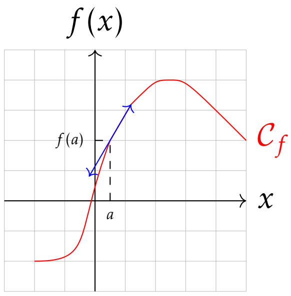
$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Ce nombre dérivé en a coïncide avec la valeur de la fonction dérivée en a. En pratique, on utilise plutôt la fonction dérivée.

2.5.2 Tangente en un point de la courbe

Par sa définition, le nombre dérivé donne la direction de la tangente à la courbe en ce point ; $f'(a)$ est le coefficient directeur. L'équation complète de la tangente en a est

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



2.6 Fonction dérivée, fonctions dérivées usuelles, opérations

Comme on peut tracer des tangentes en tout point, on peut calculer le nombre dérivé d'une fonction en tout point de son domaine de définition. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appellé fonction dérivée de f, notée f'.

On peut noter que si f et g sont deux fonctions et k un nombre réel, alors $(f+g)' = f'+g'$, $(f-g)' = f'-g'$ et $(k \times f)' = k \times f'$. Pour les fonctions usuelles, on peut admettre le tableau suivant :

f	1	k	$ax+b$	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$
f'	0	0	a	$2x$	$3x^2$	$-\frac{1}{x^2}$

Soient k un nombre réel et u et v deux fonctions, qu'on suppose dérivable, on a les propriétés suivantes :

Proposition 2.1. ▹ $(ku)' = ku'$ *(multiplication par un réel)*
▹ $(u+v) = u' + v'$ *(addition de deux fonctions)*
▹ $(u+kv) = u' + kv'$ *(addition généralisée)*

Si n est un nombre entier, on a :

Proposition 2.2. *La fonction u^n est dérivable et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.*

Proposition 2.3. *La fonction uv est dérivable et $(uv)' = uv' + u'v$.*

Si on suppose de plus que pour tout x appartenant à l'intervalle de définition de v, $v(x) \neq 0$, alors on a également la propriété suivante.

Proposition 2.4. ▹ *La fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$*
▹ *La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$*

2.7 Généralités

Soit f une fonction définie sur I, un intervalle de $\mathbf{R}$. On note f' sa dérivée si elle existe sur I.

Fonction	Dérivée
$k \in \mathbf{R}$	0
x	1
x^2	$2x$
$x^n, n \in \mathbf{N}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
e^{ax}	ae^{ax}

Théorème 2.5. *Si u et v sont deux fonctions dérivables de dérivée u' et v', alors la dérivée de la fonction $u+v$ est la fonction $v'+v'$.*

Théorème 2.6. *Si u et v sont deux fonctions dérivables de dérivée u' et v', alors la fonction uv est dérivable et sa dérivée est $uv' + v'u$.*

Fonction	Dérivée
uv	$u'v + v'u$
u^2	$2u'u$
$u^n, n \in \mathbf{N}$	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

2.8 Étude de fonction

Le but d'une étude de fonction est de pouvoir rapidement tracer l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f. Pour cela, il est recommandé de procéder de la façon suivante :

1. Calculer la fonction dérivée f'
2. On résout l'équation $f'(x) = 0$
3. On vérifie que la (ou les) solution(s) de cette équation sont dans le domaine d'étude
4. On trace le tableau de variation en indiquant sur la première ligne les points où f'(x)=0, sur la seconde ligne $f'x)$ et le signe de cette fonction et sur la dernière ligne, les variations de f

2.9 Étude de quelques fonctions usuelles

2.9.1 Étude des fonctions polynômes

Il s'agit des fonctions de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels. On suppose de plus que a est non nul. Ces fonctions sont définies sur $\mathbf{R}$. De plus, si $b = 0$, la fonction f est paire. On peut calculer la dérivée $f'(x) = 2ax + b$. Il est clair que pour $x = \frac{-b}{2a}$, $f'(x) = 0$. Il vient donc que la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}; \infty\right[$. si $a > 0$ et inversement. De plus, si a est positif (respectivement négatif), le minimum (respectivement maximum) est atteint en $x = -\frac{b}{2a}$ et vaut $f(x) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Dans ce cas précis, on peut calculer explicitement les racines : si $b^2 - 4ac \geq 0$, $f(x) = 0$ en $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Si on suppose $a \leq 0$, on a :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			$\frac{4ac-b^2}{4a}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

2.9.2 Les fonctions logarithme et exponentielle

Définition et propriétés de la fonction logarithme

On admet l'existence d'une fonction ln définie sur $[0; +\infty]$ telle que :

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(1/a) = -\ln(a)$
3. $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$
4. Si r est un rationnel, $\ln(a^r) = r \ln a$

On admet également que $\ln' x = \frac{1}{x}$. Cette égalité nous prouve la monotonie de la fonction ln.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On note e le nombre tel que $\ln(x) = 1$. Ce nombre est défini de façon unique par le théorème des valeurs intermédiaires.

Définition et propriétés de la fonction exponentielle

On définit la fonction exponentielle comme la fonction réciproque de la fonction logarithme. Si on note cette fonction exp, on doit avoir que pour tout nombre réel x, $\ln(\exp(x)) = x$.

De cette définition, on tire que

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$
3. $\frac{\exp(a)}{\exp(b)} = \exp(a-b)$

$(\ln\circ\exp)' = \exp' \times \ln' \circ \exp = \frac{\exp'}{\exp} = 1$ nous permet d'affirmer que $\exp' = \exp$. On prouve là aussi que exp est une fonction strictement croissante.

On remarquera que $\exp(1) = e$. Ceci légitimisera l'écriture $\exp(x) = e^x$.

Logarithmes et exponentielles de base a

On peut définir une fonction $\log_a = \frac{1}{\ln a}\ln$. Dans ce cas, la fonction réciproque est la fonction a^x. En physique, on prendra souvent $a = 10$ et on notera la fonction log.

Ces fonctions partagent évidement les mêmes propriétés que les fonctions logarithmes et exponentielles.

Exercice 2.6

1. Trouver le nombre dérivée en -1 de la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.
2. Trouver le nombre dérivé en 2 de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Exercice 2.7

1. Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f en -1.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g en 2.

Exercice 2.8

Calculer les fonctions dérivées f' des fonctions définies par :

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = 3x^2$
3. $f(x) = x^2 + x$
4. $f(x) = x + 1$
5. $f(x) = -2x + 1$
6. $f(x)3x^2 - 2x + 1$

Exercice 2.9

Calculer les fonctions dérivées g' des fonctions définies par :

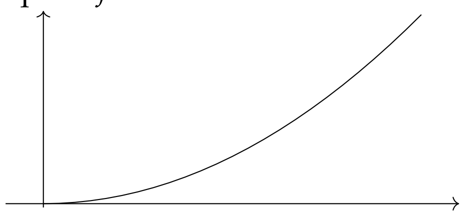
1. $g(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $g(x) = (x+1)^2$
3. $g(x) = (2x-4)^2$
4. $g(x) = (3x^2 - 2x + 1)^2$

Exercice 2.10

1. Calculer la dérivée de $x \mapsto x \times x$ en utilisant la formule $(uv)' = uv' + v'u$, en posant $u(x) = v(x) = x$.
2. Calculer l'expression de $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (x^2+2x+1)(x^2-2x+1)$.
3. On suppose que f et g sont deux fonction dérivables, telle que $\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) \neq 0$.
   a) Donner l'expression de la dérivée de $\frac{1}{g}$ en fonction de g', la dérivée de g et de g.
   b) À l'aide de la formule de 1, exprimer la dérivée de $f \times \frac{1}{g}$.
   c) Quelle formule retrouve-t-on ?

2.10 À partir de la courbe représentative

L'étude des variations d'une fonction est la donnée des intervalles I de la forme $[a;b]$ sur lesquels f est croissante ou décroissante.



2.11 Sans la courbe représentative

Ici le but est de tracer l'allure de la courbe représentative et d'obtenir des informations sur elle.

Théorème 2.7 (admis). ▹ *Si pour tout $x \in]a;b[$ $f'(x) > 0$, alors f est croissante sur $]a;b[$.*
▹ *Si pour tout $x \in]a;b[$ $f'(x) < 0$, alors f est décroissante sur $]a;b[$.*

Pour connaître les variations d'une fonction, il suffit juste de connaître le signe de la dérivée. On peut ensuite regrouper ces informations dans un tableau de signe et de variations.

Exemple. *Soit f la fonction définie pour tout nombre réel par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$.*
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie pour tout x par $f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$.
Étudions le signe de $f'(x)$. Pour cela, il faut trouver les racines de $3x^2 - 4x - 3$.
Ici, le discriminant Δ vaut $(-4)^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 16 + 36 = 52$. Comme $\Delta > 0$, il y'a deux solutions réelles $x_1 = \frac{-(-4)-\sqrt{52}}{2\times 3} = \frac{4-\sqrt{52}}{6} \approx -0.54$ et $x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{52}}{2\times 3} = \frac{4+\sqrt{52}}{6} \approx 1.87$.

Exercice 2.11

Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes définies par

- $f(x) = -4x^2 + 20x - 25$ sur $\mathbf{R}$
- $g(x) = x^3 + 2x + 1$ sur $\mathbf{R}$
- $h(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ sur $\mathbf{R}$
- $f_1(x) = x - 2 - 2\ln x$ sur $[2;20]$
- $f_2(x) = 3x + 4 - 5\ln x$ sur $]0;+\infty[$

Théorème 2.8 (de la bijection, admis)**.** *Si une fonction est strictement croissnte (ou décroissante) sur un intervalle I, elle réalise une bijection de I dans $f(I)$.*

Le théorème précédent permet de dire que si une fonction est strictement monotone entre a et b, alors elle prends toutes les valeurs entre a et b une et une seule fois. En particulier si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ possède une unique soluin dans l'intervalle $[a;b]$.

Exemple. *On a montré dans l'exercice 2.11 2.11 que $f : x \mapsto x - 2 - 2\ln x$ définie sur $[2;20]$ était strictement croissante.*

On remarque que $f(2) = -2\ln 2 \approx -1.68$ et que $f(10) = 8 - 2\ln 10 \approx 3.38$. On est donc dans le cas précédent, ce qui nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ située entre 2 et 10.

On peut obtenir encore plus de précision : il suffit de couper l'intervalle en 2 au milieu et de chercher dans quelle moitié on est dans le cas précédent. Pratiquement, il suffit de regarder le signe de $f(a) \times f\left(\frac{b-a}{2}\right)$. S'il est négatif, alors la solution recherchée est sur $\left[a; \frac{b-a}{2}\right]$, sinon elle est sur $\left[\frac{b-a}{2}; b\right]$. En commencant cette opération autant de fois que nécessaire, on peut approcher autant qu'on veut la solution.

2.12 Fonction logarithme

On définit une fonction qui possède la propriété suivante :

Proposition 2.9. *Pour tout réels a et b strictment positifs,* $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Il en découle les propriétés suivantes, vraies pour a et b deux nombres réels strictement positifs et n un entier naturel :

Corollaire 2.10.

- $\ln 1 = 0$
- $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln a^n = n \ln a$

Proposition 2.11. *Les limites de la fonctions logarithme sont :*

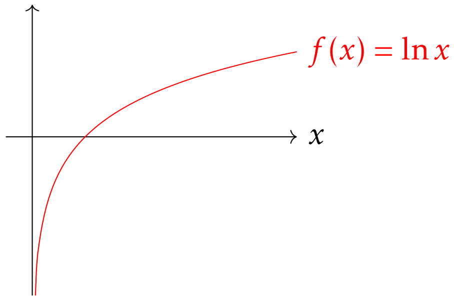
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Proposition 2.12. *La dérivée de ln est* $x \mapsto \frac{1}{x}$

Proposition 2.13. *Si u est une fonction dérivable à valeurs strictement positives sur un intervalle I, alors $\ln u$ est dérivable et* $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

Puisque la dérivée est positive pour tout x réel strictement positif, on en déduit que ln est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

On admet que la courbe représentative de la fonction logarithme est la suivante :



La fonction ln prenant toutes les valeurs réelles lorsque x parcourt la demi-droite positive, on dit qu'elle est bijective. De plus, l'équation $\ln x = x_0$ possède une seule solution dans $\mathbf{R}_+^*$.

2.13 Fonction exponentielle

La fonction logarithme (ln) étant bijective de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$, on peut définir sur ce dernier ensemble une réciproque, appellée exponentielle, notée e ou exp.

Par définition, on a les égalités suivantes :

Définition 2.14. Pour tout a réel strictement positif, $e^{\ln a} = a$ et pour tout b réel, $\ln e^b = b$.

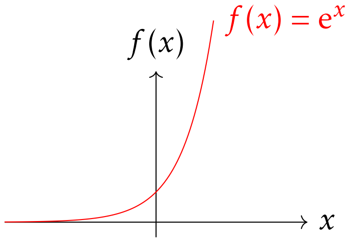
De cette définition découlent les propriétés suivantes, vraies pour tout a et b réels, et n entier naturel :

Corollaire 2.15.

- $e^0 = 1$
- $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$
- $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- $(e^a)^n = e^{na}$

On peut également dire que pour tout x réel, $e^x > 0$.

Par symétrie avec la droite d'équation $y = x$, one en déduit l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$.



Proposition 2.16. *Les limites de la fonctions exponentielle sont :*

- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Proposition 2.17. *La dérivée de $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$*

Proposition 2.18. *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors e^u est dérivable et $(e^u)' = u'e^u$*

2.14 Croissances comparées

On parle de croissance comparées lorsqu'on compare la croissance de deux fonctions. Ici, on compare la croissance des fonctions $x \mapsto x^{\alpha}$, ln et exp.

Proposition 2.19. *Si* $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^{\alpha}} = +\infty$

Proposition 2.20. *Si* $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^{\alpha}} = +0$

Exercice 2.12

Donner les limites en 0 et en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln x$

2. $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

Exercice 2.13

Donner les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{3x}$

2. $f(x) = e^{-x}$

3. $f(x) = e^{-x^2}$

4. $f(x) = \frac{1}{e^x}$

5. $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

6. $f(x) = \frac{x^3}{e^3 x}$

Exercice 2.14

Donner les dérivées des fonctions dont les expressions sont les suivante :

1. $f(x) = \ln 3x$

2. $f(x) = e^{4x}$

3. $f(t) = e^{t^2}$

4. $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

Exercice 2.15

Donner les dérivées des fonctions dont les expressions sont les suivantes :

1. $g(x) = xe^x$

2. $g(x) = (x^2 + 1)e^x$

3. $g(x) = (x^2 + 1)e^{-2x}$

4. $g(x) = (3x^2 - 2x + 1)e^{-2x}$

5. $g(t) = (0,125t)e^{-0,125t^2}$

CHAPITRE 3

Probabilités 1

Objectifs :

- Connaître le vocabulaire usuel des probabilités
- Calculer des probabilités dans des cas simples
- Utiliser la notion d'indépendance et la formule de Bayes
- Avoir connaissance de la notion de variable aléatoire
- Calculer une probabilité sur un ensemble discret lorsqu'elle suit une des lois suivantes : schéma de Bernoulli, loi binomiale

Dans ce document, on ne rentrera pas dans tout le détail du calcul des probabilités et on cherchera à rester au niveau nécessaire à un technicien supérieur. Cependant, certains points seront développés, sans rentrer dans la théorie complète, afin de disposer de la vision la plus exacte possible des probabilités.

3.1 Généralités, vocabulaire

3.1.1 Vocabulaire

Définition 3.1 (Mesure de probabilité)**.** On appelle *mesure de probabilité* (ou *probabilité*) une application d'un espace Ω dans $[0;1]$.

Il est important de noter ici qu'une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, valeurs particulières auxquelles nous donneront des significations particulières.

Définition 3.2 (Espace probabilisé)**.** La donnée d'un espace Ω d'événements et d'une mesure de probabilité constitue un *espace probabilisé*.

On ne s'attachera pas plus que cela à cette définition théorique dans un premier temps pour lui donner du sens lors de la découverte de la notion de variable aléatoire.

Définition 3.3 (événément)**.** On appelle *événement* toute partie A de Ω.

On en profite pour rappeler la notation suivante : $A \subset \Omega \iff \forall x \in A, x \in \Omega$, où $\iff$ est une notation pour signifier l'équivalence logique (les deux propositions sont interchangeables) et $\forall$ signifie aussi bien «pour tout» que «quelque soit».

On précise que l'événement est élémentaire lorsqu'il est réduit à un «point».

Exemple (événement élémentaire)**.** *$\{a\}, a \in \Omega$ est un événement élémentaire.*

En pratique, on note plutôt :

Soit A l'événement A : «la carte tirée dans le jeu de 32 cartes est un roi de cœur».

Sans rentrer dans les détails, la réunion des événements élémentaires recouvre tout l'espace probabilisé.

3.1.2 Une axiomatique simplifiée

On ne prends pas ici la totalité de l'axiomatique de Kolmogorov sur les probabilités, mais on va citer quelques uns des axiomes, vérités premières sur lesquelles nous ne reviendrons pas.

Soit (Ω, p) un espace probabilisé, c'est-à-dire, p est une mesure de probabilité sur Ω.

A1 $p(\emptyset) = 0$
A2 Si A et B sont deux événements disjoints, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
A3 Si A est un événement élémentaire, et que tous les événements élémentaires ont même probabilité, $p(A) = \frac{1}{\#\Omega}$ où $\#\Omega$ est la «taille» de Ω.

Voici quelques exemples de mise en pratique des ces axiomes.

Exemple (A3)**.** *Soit A l'événement A : «tirer un roi de trèfle dans un jeu de 32 cartes.».*
Il s'agit d'un événement élémentaire, on a donc $p(A) = \frac{1}{32}$.

Exemple (A2)**.** *Soient A et B deux événements disjoints.*
Supposons que $p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(B) = \frac{1}{3}$.
Alors $p(A \cup B) = \frac{5}{6}$.

Remarque : la disjonction des événements se note de façon ensembliste de la façon suivante : $A \cap B = \emptyset$. C'est-à-dire que $x \in A \implies x \notin B$ et réciproquement.

Dans le cas pratique des probabilités, on se sert également souvent de la notion suivante.

Définition 3.4 (événement contraire)**.** On appelle événement contraire la négation totale de l'événement A considéré. On le note $\overline{A}$.

Exemple (événement contraire)**.** *Soit A l'événement A : «tirer un roi de trèfle dans un jeu de 32 cartes.».*
L'événement contraire $\overline{A}$ est l'événement «ne pas tirer de roi de trèfle», c'est à dire tirer n'importe quelle carte sauf *le roi de trèfle.*

Proposition 3.5 (probabilité de l'événement contraire)**.**

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Corollaire 3.6 (probabilité de Ω)**.** $p(\Omega) = 1$

3.1.3 Formule des probabilités totales et exemples

On admet la propriété suivante :

Proposition 3.7 (Formule des probabilités totales)**.** *Soient A et B deux parties de Ω, on a*

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Cette proposition appelle plusieurs remarques :

- le terme $-p(A \cap B)$ correspond à la soustraction du «double compte» ;
- on retrouve A2 en utilisant A1 ;
- cette proposition possède deux cas d'utilisation :

— on connaît $p(A \cap B)$;
— A et B sont indépendant et c'est l'objet de la section suivante.

Exemple (Formule des probabilités totales)**.**

Pour finir cette partie, il faut évoquer quelques problèmes usuels de dénombrement et quelques notions et notations associés.

Définition 3.8 (factorielle d'un entier)**.** On appelle factorielle de n le nombre noté $n! = n \times n - 1 \times \cdots \times 2 \times 1$, avec la convention $0! = 1$

On peut considérer l'algorithme suivant :
On en verra une mise en œuvre en Python.
On peut ainsi calculer le nombre de combinaisons possibles pour le tirage du loto. On trouve $\frac{49!}{(49-7)!} = 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 \times 43$, en tenant compte de l'ordre d'apparition des numéros. On parle alors du nombre d'arrangement de 7 parmi 49. Si on ne tient pas compte de cet ordre, on peut aussi définir le nombre de combinaison de 7 parmi 49. On obtient le définition suivante.

Définition 3.9 (nombre de combinaison)**.** Le nombre de combinaison de p parmi n est le nombre de sous ensemble à p éléments possible dans un ensemble à n éléments, l'ordre ne comptant pas.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

3.2 Conditionnement, indépendance et formule de Bayes

3.2.1 Conditionnement

La notion de conditionnement recouvre, en probabilités, les événements dont l'occurrence dépend a priori d'un autre événement. On parle aussi de probabilités conditionnelles.

Définition 3.10 (probabilité conditionnelles)**.** On dit que $p(A|B)$ est la probabilité de réalisation de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

En pratique, on parle dit souvent «probabilité de A sachant B.».
On a de façon générale $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$
Parmi les façons usuelles de présenter ces probabilités conditionnelles, on a les arbres de probabilité.

$$\begin{array}{llll}
 & & p_A(B)\,B & \longrightarrow p(A \cap B) \\
p(A) & A & & \\
 & & p_A(\overline{B})\,\overline{B} & \longrightarrow p(A \cap \overline{B}) \\
 & & p_{\overline{A}}(B)\,B & \longrightarrow p(\overline{A} \cap B) \\
p(\overline{A}) & \overline{A} & & \\
 & & p_{\overline{A}}(\overline{B})\,\overline{B} & \longrightarrow p(\overline{A} \cap \overline{B})
\end{array}$$

On peut également utiliser un tableau. Un exercice de probabilité permettra de mettre en œuvre ces techniques.

3.2.2 Indépendance

Il s'agit de caractériser le fait que des probabilités dépendent l'une de l'autre.

Dans le cadre du métier de technicien, on admet le théorème suivant dont nous donnerons les deux cas d'usage.

Théorème 3.11 (indépendance)**.** *Deux événements A et B sont indépendants si, et seulement si,* $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Ce théorème sert aussi bien dans le sens direct : si A et B sont deux événements indépendants, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, ce qui est en particulier utile pour la formule des probabilités totales.

Réciproquement, si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, alors on indépendance des événements. En particulier $p(A|B) = p(A)$ lorsque les événements sont indépendants.

3.2.3 Formule de Bayes

La formule de Bayes et le théorème associé sont particulièrement utile dans le cadre du calcul des probabilités, en l'ocurrence pour obtenir la probabilité conditionnelle de $p(A|B)$ à partir de $p(B|A)$.

Théorème 3.12 (de Bayes)**.** *Soient A et B deux événements, on a*

$$p(A|B) = \frac{p(B|A) \times p(A)}{p(B)}$$

Une autre formulation, plus complète est la suivante :

$$p(A|B) = \frac{p(B|A) \times p(A)}{p(B|A)p(A) + p(B|\overline{A})p(\overline{A})}$$

3.3 Variable aléatoire et lois discrètes

3.3.1 Variable aléatoire

Notons d'abord que le mot «variable» est assez mal choisi. En effet, la définition qui vient va permettre de préciser la notion.

Définition 3.13 (variable aléatoire)**.** Une variable aléatoire est une *fonction* de Ω, espace probabilisé dans un ensemble de nombre.

Il s'agit ici d'une définition assez large qui servira aussi bine pour les variables aléatoires discrètes ou continues.

Pour l'instant, on ne s'intéresse qu'aux variables aléatoires discrètes.

Définition 3.14 (variable aléatoire discrète)**.** On dit qu'une variable aléatoire est discrète lorsqu'elle ne prends qu'un nombre fini de valeurs.

On note une variable aléaotoire sous la forme $(X = k)$, où k est un des éléments de l'ensemble discret.

Lorsque k décrit l'ensemble des valeurs, la somme des probabilités vaut 1.

Objectifs :

	Acquis
Calculer des probabilités dans un ensemble fini	
Calculer des probabilités conditionnelles	
Utiliser la formule de Bayes	
Justifier de l'indépendance de deux événements	
Justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale	
Donner les paramètres d'une loi binomiale	
Calculer l'espérance et la variance d'une v.a. qui suit une loi binomiale	
Calculer $p(X = k)$ lorsque X suit une loi binomiale donnée	
Calculer $p(X \leqslant k)$ lorsque X suit une loi binomiale donnée	
Interpréter une probabilité	

Exercice 3.1

1. On admet que si on prélève, au hasard, une pièce dans la production, la probabilité que cette pièce ne soit pas conforme, est $p = 0,035$.

a) On note X, la variable aléatoire représentant le nombre de pièces défectueuses dans un lot de 100 pièces. Les pièces sont prélevées au hasard et le tirage est assimilé à un tirage avec remise.
Justifier que X suit une loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 0,035$.

b) Le tableau ci-dessous, donne la probabilité des évènements « $X = k$ » pour k variant de 0 à 9, à l'exception de l'évènement « $X = 2$ ».

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = k)$	0,0284	0,1029		0,2188	0,1924	0,1340	0,0770	0,0375	0,0158	0,0059

On considère les évènements :

A : « le nombre de pièces défectueuses du lot est égal à 2 » ;
B : « le nombre de pièces défectueuses du lot est au moins égal à 2 ».

Calculer $P(A)$ au dix millième près, puis $P(B)$ au millième près.

c) Un lot de 100 pièces est envoyé à un client, le lot est accepté s'il contient au plus 4 pièces défectueuses.
En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer au millième près, la probabilité que le client refuse ce lot.

d) En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer la plus petite valeur entière n telle que :

$$P(X > n) < 0,03$$

Exercice 3.2

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise produit, en grande quantité, des appareils. Chaque appareil fabriqué peut présenter deux défauts que l'on appellera défaut a et défaut b.

On prélève un appareil au hasard dans la production d'une journée.

On note A l'évènement : « l'appareil présente le défaut a » et B l'évènement : « l'appareil présente le défaut b ».

Les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0,03$ et $P(B) = 0,02$; on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'évènement E_1 : « l'appareil présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement E_2 : « l'appareil est défectueux, c'est-à-dire qu'il présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement E_3 : « l'appareil ne présente aucun défaut ».
4. Sachant que l'appareil est défectueux, quelle est la probabilité qu'il présente les deux défauts ?
   Le résultat sera arrondi au millième.

Dans les parties B et C, les résultats seront à arrondir au centième.

Les appareils sont conditionnés par lots de 100 pour l'expédition aux distributeurs de pièces détachées. On prélève au hasard un échantillon de 100 appareils dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 appareils.

Pour cette partie, on considère que, à chaque prélèvement, la probabilité que l'appareil soit défectueux est $0,05$.

On considère la variable aléatoire X_1 qui, à tout prélèvement de 100 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux.

1. *a*) Justifier que la variable aléatoire X_1 suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Donner l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_1.

Les appareils sont aussi conditionnés par lots de 800 pour l'expédition aux usines de montage. On prélève au hasard un lot de 800 appareils. On considère la variable aléatoire X_2 qui, à tout prélèvement de 800 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X_2 par la loi normale de moyenne 40 et d'écart-type $6,2$.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 50 appareils défectueux dans le lot.
2. Déterminer le réel x tel que $P(X_2 > x) = 0,01$.
   En déduire, sans justification, le plus petit entier k tel que la probabilité que le lot comporte plus de k appareils défectueux soit inférieure à $0,01$.

Exercice 3.3

Cet exercice se compose de trois parties qui peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On s'intéresse aux requêtes reçues par le serveur web d'une grande entreprise, provenant de clients dispersés sur le réseau Internet.

La réception de trop nombreuses requêtes est susceptible d'engendrer des problèmes de surcharge du serveur.

Dans cette partie, on considère :

- ▹ d'une part, que la probabilité pour le serveur de connaître des dysfonctionnements importants au cours d'une journée donnée est $p = 0,01$;
- ▹ d'autre part, que des dysfonctionnements importants survenant au cours de journées distinctes constituent des évènements aléatoires indépendants.

1. On appelle Y la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où le serveur connaît des dysfonctionnements importants au cours d'un mois de 30 jours.

a) On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale.
Préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que le serveur connaisse au plus 2 jours de dysfonctionnements importants pendant un mois.

2. On appelle Z la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où le serveur connaît des dysfonctionnements importants au cours d'une année de 365 jours.

a) Donner, sans justification, la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.

b) Donner l'espérance mathématique et l'écart type de la variable aléatoire Z.

Exercice 3.4

Une entreprise fabrique des pièces en grande série.
Une pièce est conforme si sa masse, en grammes, est comprise entre 7,495 et 7,505.
L'entreprise dispose d'une machine de contrôle des pièces fabriquées.
On prélève une pièce au hasard dans la production.
On note C l'évènement : « la pièce est conforme ».
On note A l'évènement : « la pièce est acceptée par la machine de contrôle ».
Une étude statistique a été conduite, au terme de laquelle on a pu estimer que :

$$p(A) = 0,95,\ p\left(C \cap \overline{A}\right) = 0,01 \text{ et } p\left(\overline{C} \cap A\right) = 0,005.$$

1. *a*) À l'aide d'une phrase, donner la signification des évènements $C \cap \overline{A}$ et $\overline{C} \cap A$.
Ces deux évènements correspondent aux cas où la machine de contrôle commet une erreur.

b) Calculer la probabilité que la machine de contrôle commette une erreur.

2. Calculer la probabilité qu'une pièce soit conforme, sachant qu'elle est refusée.

Les pièces acceptées par la machine de contrôle sont emballées par lots de 100. On prélève au hasard un lot. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 pièces.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 100 pièces, associe le nombre de pièces non conformes.

On admet que la probabilité qu'une pièce soit non conforme, sachant qu'elle a été acceptée, est 0,005 3.

1. *a*) Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Donner l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y.

2. Calculer la probabilité qu'un lot ne contienne que des pièces conformes. On donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-2} près.

Exercice 3.5

Une source émet un signal binaire composé de 0 et de 1. Lors du transport, le signal peut être déformé. Un 0 peut être transformé en 1 avec une probabilité $0,1$ et, de même, un 1 peut être transformé en 0 avec une probabilité $0,1$.

Pour toute la suite, dans une série de chiffres, on lit de gauche à droite, le premier chiffre envoyé étant donc celui écrit le plus à gauche.

On envoie le signal 00.

On admet que les erreurs de transmission sont des évènements aléatoires indépendants les uns des autres.

On considère les évènements suivants :

- E_1 : « les deux chiffres sont modifiés »
- E_2 : « le premier chiffre est modifié mais pas le deuxième »
- E_3 : « aucun chiffre n'est modifié »
- E_4 : « au moins un des chiffres est modifié »

Pour chaque affirmation, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie.
Une bonne réponse rapporte $0,5$ point, une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

1. La probabilité de l'évènement E_1 est égale à :

- 0,01
- 0,99
- 0,09
- 0,81

2. Si l'évènement E_2 est réalisé, le signal reçu est :

- 00
- 01
- 10
- 11

3. La probabilité de l'évènement E_2 est égale à :

- 0,19
- 0,81
- 0,09
- 0,90

4. La probabilité de l'évènement E_3 est égale à :

- 0,01
- 0,99
- 0,09
- 0,81

5. La probabilité de l'évènement E_4 est égale à :

- 0,19
- 0,20
- 0,11
- 0,91

1. On considère l'expérience aléatoire consistant à émettre une chaîne constituée de 10 fois le chiffre 1 et à observer la chaîne reçue. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque chaîne ainsi reçue, associe le nombre d'erreurs de transmission, c'est-à-dire le nombre de 0 obtenus.
   On rappelle que la probabilité qu'un chiffre soit mal transmis est $0,1$.
   a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.
   b) Calculer à $0,001$ près la probabilité qu'il y ait exactement une erreur de transmission.
   c) Montrer que la probabilité qu'il y ait au plus une erreur de transmission est égale à $0,74$ à $0,01$ près.

Exercice 3.6

Chaque jour, une entreprise produit des condensateurs identiques en grande quantité. Chaque condensateur fabriqué peut présenter deux défauts : l'un au niveau des armatures, appelé défaut A, et l'autre, appelé défaut B, au niveau du diélectrique.

Une étude statistique a montré que 2 % des condensateurs fabriqués présentent le défaut A et 1 % le défaut B. La présence du défaut A sur un condensateur choisi au hasard dans la production est considérée comme un évènement aléatoire indépendant de la présence du défaut B sur le même condensateur.

1. On prélève un condensateur au hasard dans la production.
   a) Calculer la probabilité que ce condensateur présente les deux défauts A et B.
   b) Calculer la probabilité que ce condensateur ne présente aucun défaut.
   c) Calculer la probabilité que ce condensateur présente au moins un des deux défauts.
2. On réalise des prélèvements aléatoires de 100 condensateurs dans la production. Chacun de ces prélèvements est assimilé à un tirage avec remise.
   Un condensateur est dit défectueux lorsqu'il présente au moins un des deux défauts.
   On admet, pour cette question, que la probabilité qu'un condensateur prélevé au hasard soit défectueux est 0,03.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de condensateurs défectueux dans un lot de 100 condensateurs prélevés au hasard.
   a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.
   b) Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'il y ait dans un lot exactement 3 condensateurs défectueux.

Exercice 3.7

Une machine fabrique un très grand nombre de pièces d'un même modèle.

Les résultats approchés seront donnés à 10^{-2} près.

On admet que la proportion de pièces conformes dans la production d'une journée est de 90%. On prélève au hasard un lot de 50 pièces dans la production pour vérification de l'épaisseur. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On désigne par Y la variable aléatoire prenant le nombre de pièces non conformes dans ce lot.

1. La variable aléatoire Y suit une loi binomiale.
Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux pièces non conformes dans ce lot.

Pour améliorer sa production, l'usine achète une deuxième machine.

On sait que 40% des pièces sont fabriquées par la première machine M_1, les autres pièces étant fabriquées par la nouvelle machine M_2.

Par ailleurs, 90% des pièces fabriquées par la machine M_1 sont conformes. De plus, une étude faite sur la production journalière globale de l'usine a montré que 6% des pièces produites sont non conformes.

On prélève au hasard une pièce dans la production journalière globale de l'usine.

On définit les événements suivants :

- ▹ A : « La pièce prélevée provient de la machine M_1. »
- ▹ $\bar{A}$: « La pièce prélevée provient de la machine M_2. »
- ▹ C : « La pièce est conforme. »

1. Montrer que la probabilité que la pièce prélevée provienne de la machine M_1 et soit non conforme est $0,04$.
2. Recopier et compléter avec des probabilités, le tableau suivant :
3. Calculer la probabilité que la pièce prélevée provienne de la machine M_1 sachant que cette pièce est conforme.
4. Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Exercice 3.8

Une entreprise fabrique des appareils électroniques en grande série. En vue d'améliorer sa production, eUe effectue une étude. La partie A de cet exercice s'intéresse à la phase de fabrication de ce produit ; la partie B, au temps de bon fonctionnement d'un produit ne présentant pas de défaut de fonctionnement en fin de fabrication.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Un composant électronique entrant dans la fabrication de ce type d'appareil peut se révéler défectueux et induire un défaut de fonctionnement de cet appareil.

On prélève 50 appareils dans la production d'un jour donné. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note E l'évènement : « Un appareil présente un défaut de fonctionnement ».

On admet que $P(E) = 0,016$.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 appareils, associe le nombre d'appareils présentant un défaut de fonctionnement.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il n'y ait aucun appareil présentant un défaut de fonctionnement.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus deux appareils présentant un défaut de fonctionnement.

Le but de cette partie est de trouver une solution particulière, notée F, de l'équation différentielle (E) suivante :

$$10^4 y' + 4y = 4.$$

1. Résoudre l'équation différentielle sans second membre

$$10^4 y' + 4y = 0.$$

2. Montrer que la fonction h, définie pour tout réel t, par $h(t) = 1$ est solution de l'équation différentielle (E).
3. Exprimer les solutions de l'équation différentielle (E).
4. En déduire la solution particulière F telle que $F(0) = 0$.

Dans cette partie, on s'intéresse aux appareils ne présentant pas de défaut en fin de fabrication et à leur durée de bon fonctionnement. On considère cette durée, exprimée en heures, comme une variable aléatoire T prenant des valeurs positives ou nulles.

On admet que pour tout nombre réel t positif ou nul, on a :

$$P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}000\,4t}.$$

1. *a*) Calculer la probabilité

$$P(T \leqslant 600).$$

b) En déduire la probabilité qu'un appareil fonctionne encore après 600 heures d'utilisation.

2. *a*) Déterminer le plus grand nombre entier t_0 tel que

$$P(T > t_0) \geqslant 0,95.$$

b) L'emballage de cet appareil porte la mention « durée de fonctionnement supérieure à 100 heures ». Pour un appareil choisi au hasard, la probabilité que cette mention soit fausse est-elle inférieure à 0,05 ?

3. On admet que la moyenne de temps de bon fonctionnement d'un appareil électronique est définie par :

$$E(T) = 0{,}000\,4 \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-0{,}000\,4t}\,\mathrm{d}t.$$

On pose :

$$I(\alpha) = 0{,}000\,4 \int_0^{\alpha} t\mathrm{e}^{-0{,}000\,4\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$I(\alpha) = -\alpha\mathrm{e}^{-0{,}000\,4\alpha} - \frac{1}{0{,}000\,4}\mathrm{e}^{-0{,}000\,4\alpha} + \frac{1}{0{,}000\,4}.$$

b) Donner la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$. On rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

c) En déduire la valeur de $E(T)$ exprimée en heures.

Exercice 3.9

On s'intéresse à un dispositif comportant deux composants électriques A et B montés en parallèle. Si un seul de ces deux composants est défaillant, le dispositif continue à fonctionner.

Dans cette partie, on étudie la durée de vie de ce dispositif.
La durée de vie de chaque composant est une variable aléatoire.

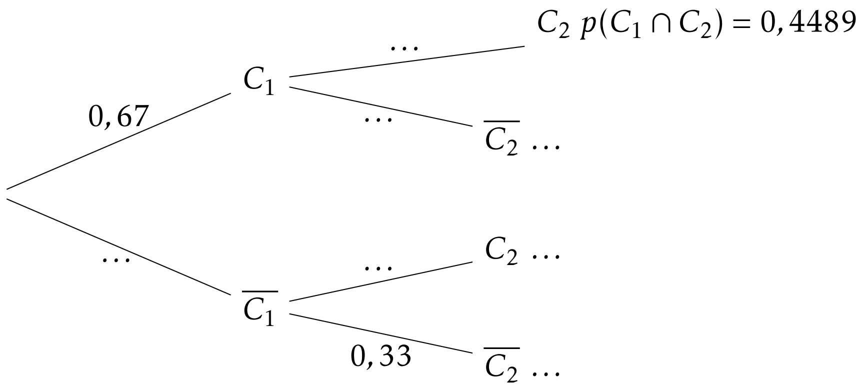
1. On désigne par t un nombre réel strictement positif. On admet que la probabilité $p(t)$ que le composant A ait une durée de vie strictement inférieure à t est donnée par

$$p(t) = \int_0^t 0{,}000\,4\mathrm{e}^{-0{,}000\,4x}\,\mathrm{d}x.$$

Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que le composant A ait une durée de vie strictement inférieure à 1 000 heures.

2. Sur le document réponse 2 est donné l'arbre pondéré décrivant la situation du dispositif au bout de 1 000 heures.
C_1 désigne l'événement « le composant A est en état de fonctionnement » et C_2 désigne l'événement « le composant B est en état de fonctionnement ».

a) Compléter l'arbre du document réponse 2 et indiquer le détail des calculs des probabilités dans la colonne « Probabilités ».



b) Déterminer la probabilité de l'événement C_2.

c) Les événements C_1 et C_2 sont indépendants ? Justifier la réponse.

d) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au bout de 1 000 heures, le dispositif soit en état de fonctionnement.

Dans cette partie, les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une entreprise produit en grande série le composant A dont il est question dans la partie A. Une étude statistique permet d'admettre que la probabilité qu'un composant ait une durée de vie supérieure à 1 000 heures est $0,67$. Les durées de vie des composants sont indépendantes les unes des autres.

Pour un échantillon de 50 composants, on note X la variable aléatoire égale au nombre de composants ayant une durée de vie supérieure à 1 000 heures.

1. On admet que X suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité $p(X = 42)$.
3. Ci-dessous est donné un extrait du tableau, obtenu à l'aide d'un tableur, donnant les valeurs des probabilités $p(X \leq k)$, où k désigne un nombre entier naturel appartenant à l'intervalle $[0\,;50]$.

	A	B	C	D
1	k	$p(X \leq k)$		
2	38	0,937 149 61		
3	39	0,968 259 95		
4	40	0,985 629 89		
5	41	0,994 231 41		
6	42	0,997 973 63		
7	43	0,999 387 18		
8	44	0,999 843 76		
9	45	0,999 967 36		
10	46	0,999 994 64		
11	47	0,999 999 35		
12	48	0,999 999 95		
13	49	1		
14	50	1		
15				
16				

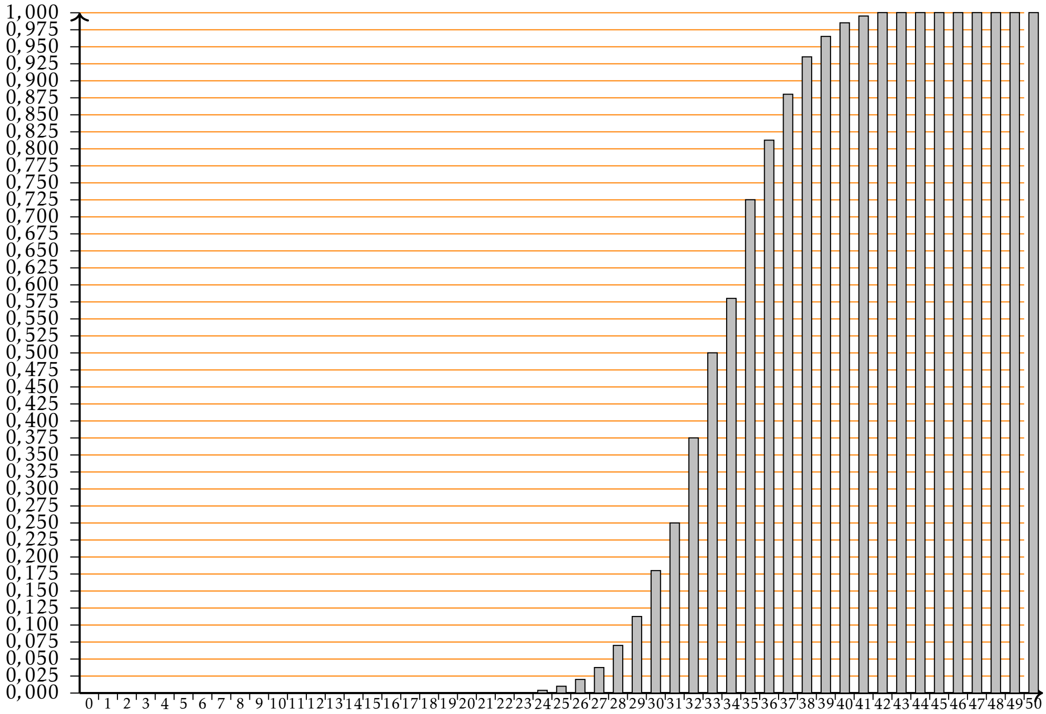
   À l'aide de ce tableau, déterminer la probabilité que le nombre de composants ayant une durée de vie supérieure à 1 000 heures parmi cet échantillon soit strictement supérieur à 42.
4. Sur l'annexe, le diagramme en bâtons représente les valeurs de $p(X \leq k)$ en fonction de k.

   a) À l'aide de ce diagramme, déterminer le plus petit nombre entier naturel k_1 tel que

$$p\left(X \leq k_1\right) > 0,025,$$

   puis le plus petit nombre entier naturel k_2 tel que

$$p\left(X \leq k_2\right) > 0,975,$$



b) Peut-on affirmer : « *le nombre de composants dont la durée de vie est supérieure à 1 000 heures appartient à l'intervalle [27 ; 40] avec une probabilité supérieure à* 0,95 » ? Justifier la réponse.

Exercice 3.10

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une société, spécialiste en équipements et accessoires de bureautique, souhaite commercialiser un nouveau modèle de photocopieur multifonction dont l'une des caractéristiques est la correction de QCM. Dans le but de respecter le plan marketing établi, l'un de ces photocopieurs est installé pour une période d'essai dans le secrétariat pédagogique d'une université.

Les étudiants de cette université ont passé une épreuve de culture générale, sous la forme d'un QCM. Les documents réponses ont été ensuite corrigés par ce photocopieur.

Une étude a été réalisée afin d'évaluer la fréquence des erreurs de correction et le temps nécessaire à cette correction.

On prélève au hasard un document réponse de cette épreuve. Tous les documents réponses ont la même probabilité d'être tirés.

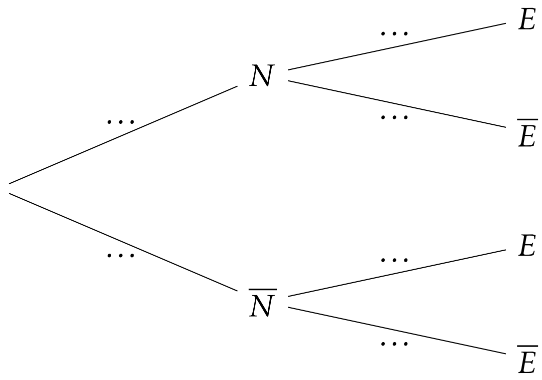
Lors de cette étude, 85 % des documents réponses ont été complétés en noir et le reste dans une autre couleur.

La probabilité qu'un document réponse présente au moins une erreur de correction sachant que la couleur utilisée pour y répondre est le noir, est égale à $0,001$.

La probabilité qu'un document réponse présente au moins une erreur de correction sachant que la couleur utilisée pour y répondre n'est pas le noir, est égale à 0,1.

On définit les évènements suivants :
E : « Le document,réponse présente au moins une erreur de correction » ;
N : « Le document réponse a été complété en noir ».

1. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous qui illustre la situation précédente.



2. Dans cette question, on donnera les valeurs exactes.
   a) Justifier que $P(N \cap E) = 0{,}000\,85$.
   b) Calculer la probabilité de l'évènement $\overline{N} \cap E$.
   c) En déduire la probabilité $P(E)$.

3. Quelle est la probabilité, donnée à $1O^{-3}$ près, que le document prélevé soit écrit en noir, sachant qulil présente au moins une erreur de correction ?

On appelle document « mal corrigé » un document réponse présentant au moins une erreur de correction.
La proportion de documents « mal corrigés » est arrondie à 1,6 %.
On prélève au hasard 100 documents réponses. Le nombre de documents réponses est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de documents réponses « mal corrigés » parmi les 100 choisis.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité $P(X = 0)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 3.11

À l'atelier de coupe, deux machines M_1 et M_2 découpent les pièces, puis celles-ci sont stockés sans distinction de leur provenance.
La machine M_1 découpe 60% des pièces et 5% de ces pièces sont défectueuses.
La machine M_2 découpe 40% des pièces et 2,5% de ces pièces sont défectueuses.
On notera E_1 l'événement «La pièce a été découpée par la machine M_1».
On notera E_2 l'événement «La pièce a été découpée par la machine M_2».
On notera D l'événement «La pièce est défectueuse».

1. On prélève au hasard une pièce de la production totale.
   Calculer es probabilités : $P(E_1 \cap D)$; $P(E_2 \cap D)$ et $P(D)$.
2. Déterminer les probabilités conditionnelles : $P_D(E_1)$ et $P_D(E_2)$.

Exercice 3.12

A et B sont deux événements.
On sait que :
$P(A) = \frac{1}{3}$; $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \alpha$ (α réel).
Calculer α dans les cas suivants.

1. A et B sont indépendants.
2. A et B sont incompatibles.
3. A est une partie de B.

Que pensez-vous de ce problème si B est une partie de A ?

Exercice 3.13

Une entreprise fabrique des sacs plastiques.
On admet que 3% des sacs de la productions présentent un défaut.
On contrôle les sacs d'un lot. Ce contrôle refuse 94% des sacs avec défaut et accepte 92% des sacs sans défaut.
On prélève au hasard un sac dans le lot. On considère les événements suivants :
D : «Le sac a un défaut» ;
A : «Le sac est accepté à l'issue du contrôle».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé : $P(D)$, $P_D(\overline{A})$ et $P_{\overline{D}}(A)$.
   (On rappelle que $P_D(\overline{A})$ est la probabilité que l'événement $\overline{A}$ sachant que l'événement D est réalisé).
2. *a*) Déterminer $P_D(A)$.
   b) Calculer $P(A \cap D)$ et $P(A \cap \overline{D})$
3. Déduire de ce qui précède $P(A)$.
4. Calculer la probabilité qu'un sac soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle. Arrondir à 10^{-3}.

3.4 Généralités

Définition 3.15. Une variable aléatoire est une fonction de Ω, l'univers des événements possible dans un espace «mesurable».

En pratique, notre espace «mesurable» est $\mathbf{R}$ et non un espace quelconque. L'étude d'une probabilité est donc souvent ramenée à l'étude d'une fonction à valeurs réelles.

Définition 3.16. On dit qu'une variable aléatoire est discrète si la variable aléatoire est à valeur dans un ensemble dénombrable
Dans les autres cas, on dit alors que la variable aléatoire est continue.

Une variable aléatoire permet de décrire entièrement un événement probabiliste. Plus précisément, il faut donner la valeur de X pour tous les élements de l'espace de départ.

Définition 3.17. La donnée de la valeur de X pour les différents événements de l'espace de probabilité s'appelle la loi de X.

Exemple. *On lance un dé non pipé à 6 faces.*
Si on obtient un nombre pair, on double la mise de départ. Si on reçoit un nombre impair, on perds la valeur faciale du dé.

Dans le cadre d'une variable aléatoire continue, on peut donner une fonction f qu'on appelle densité de probabilité.

3.5 Quantités caractéristiques

3.5.1 Espérance

Définition 3.18. On définit l'espérance d'une variable aléatoire discrète par :

$$E[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$$

Définition 3.19. Pour une loi de probabilié dont on connaît la densité de probabilité f, l'espérance est donnée par :

$$E[X] = \int_{x \in X(\Omega)} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

Cette espérance se calcule et se comporte comme une moyenne et partage un certain nombre de ses propriétés.

Proposition 3.20. *Si X est un variable aléatoire et a un nombre réel, alors*

$$E[aX] = aE[X]$$

Proposition 3.21. *Si X est un variable aléatoire et a un nombre réel, alors*

$$E[X + a] = E[X] + a$$

Proposition 3.22. *Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, et a et b deux nombres réels, alors*

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

3.5.2 Variance et écart type

Définition 3.23. La variance d'une variable aléatoire discrète se calcule par

$$V(x) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X = k)$$

Définition 3.24. Pour une loi de probabilié dont on connaît la densité de probabilité f, la variance est donnée par :

$$V(X) = \int_{x \in X(\Omega)} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème 3.25 (de Koenig)**.** $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$

Proposition 3.26. $V(X) \leq 0$

En pratique, on s'intéresse plus à l'écart type σ qui vaut $\sqrt{V(X)}$.

Exercice 3.14

Les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Un fabriquant de produits d'entretien distribue ses produits par lot de 25 dans les magasins de la région.

On prélève au hasard un lot de 25 articles parmi ceux distribués dans la journée.

On assimile ce prélévement à un tirage avec remise de 25 articles.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélévement de 25 articles, associe le nombre d'articles défectueux parmi ceux-ci.

On suppose que la probabilité de l'événement D : «L'article est défectueux» est $p(D) = 0{,}05$.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer $p(X = 0)$
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélévement, il y ait exactement deux articles défectueux.
4. Calculer la probabilité que, dans un tel prélévement, il y ait au plus deux articles défectueux.

Exercice 3.15

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 3. À l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes :

1. $P(X = 0)$
2. $P(X = 1)$
3. $P(X \leq 3)$
4. $P(X > 2)$

Exercice 3.16

Retrouver les résultats précédents avec la table de la loi de Poisson.

Exercice 3.17

Le service qui gère les commandes d'une entreprise de vente par correspondance a relevé pour les années passés une moyenne de 5 erreurs pour 100 commandes.

On suppose que la variable aléatoire qui mesure le nombre d'erreurs pour 100 commandes suit la loi de Poisson de paramètre 5.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

1. A : «Il y a exactement 5 erreurs» ;
2. B : «Il y a moins de 5 erreurs» ;
3. C : «Il y a au moins 5 erreurs».

Exercice 3.18

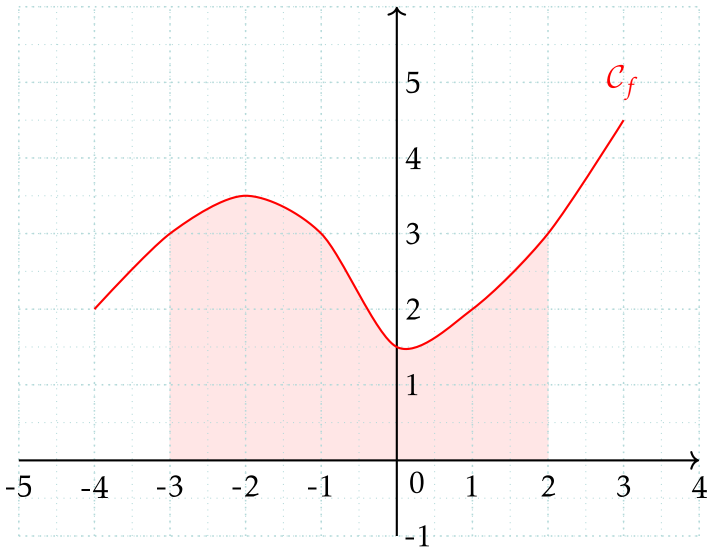
Un livre de 300 pages contient 225 fautes d'impression distribuées au hasard. Soit X la variable aléatoire qui mesure le nombre de fautes par page, on suppose que X suit une loi de Poisson.

1. Déterminer le paramètre dde cette loi.
2. Déterminer la probabilité qu'une page donnée contienne :
   - *a*) deux fautes d'impression ;
   - *b*) moins de deux fautes d'impression ;
   - *c*) au moins trois fautes d'impression.

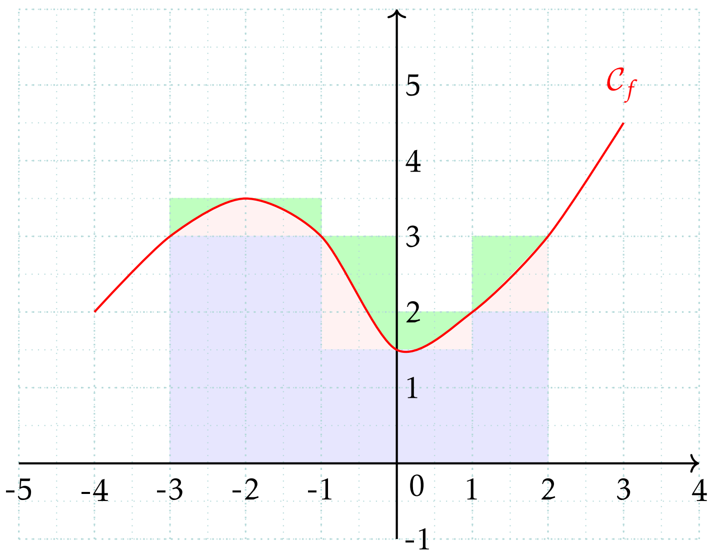
CHAPITRE 4

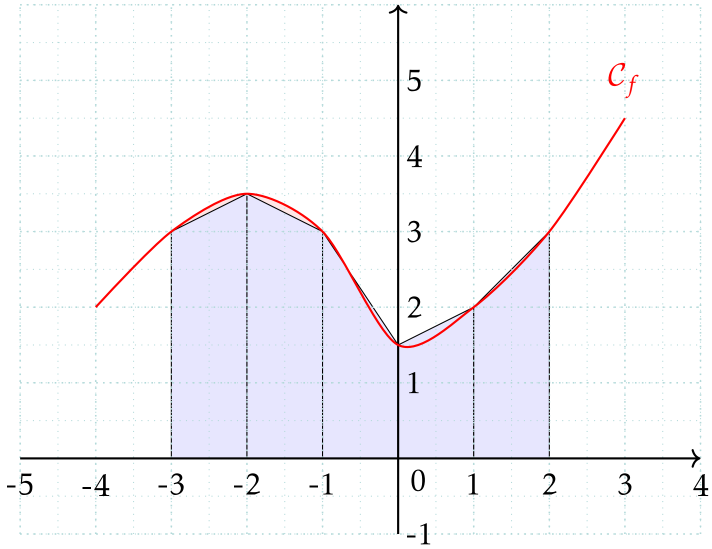
Calcul intégral

Dans ce cours, on va définir, pour des fonctions positives, l'intégrale comme l'aire sous une courbe. On étendra ensuite cette définition à une classe plus grande de fonctions, dont le signe peutêtre négatif et même varier.



L'idée générale est d'encadrer cette aire par des aires faciles à déterminer, comme des aires de rectangles ou des aires de trapèzes :





Dans la dernière figure, les trapèze ont été construit en prenant la corde, mais on aurait pu construire des trapèzes en prenant la tangente au point médian.

Donnons maintenant un discours mathématiques plus précis.

À partir de maintenant, a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$.

4.1 Intégrale d'une fonction positive

4.1.1 Les fonctions étagées

Définition 4.1. On appelle *subdivision* de $I = [a, b]$ toute famille finie «croissante» telle que :

$$a_0 = a \,;\, a_n = b \,;\, \forall 0 \leq i < n,\ a_i < a_{i+1}$$

Remarque. Si $\forall 0 \leq i < n,\ a_{i+1} - a_i = cte$, on dit que la subdivision est *régulière*.

Définition 4.2. Une *fonction étagée* est une fonction constante sur chaque intervalle d'une subdivision.

Proposition 4.3. *Si f est une fonction continue sur I, alors il existe une fonction étagée $e_{\inf}$ et une fonction étagée $e_{\sup}$ définies sur une subdivision de I telle que pour tout $x \in I$,*

$$e_{\inf}(x) \leq f(x) \leq e_{\sup}(x)$$

Démonstration. Il suffit de considérer la subdivision «triviale» I et de prendre $e_{\inf} = \min_{x \in I} f(x)$ et $e_{\sup} = \max_{x \in I} f(x)$. □

Soit e une fonction étagée, et $S = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ une subdivision. On suppose de plus que si $x \in [a_i, a_i + 1]$, $e(x) = e_i > 0$ pour $i = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Définition 4.4. L'*intégrale* d'une fonction étagée se définit par :

$$I_e = e_0 \times (a_1 - a_0) + e_1 \times (a_2 - a_1) + \cdots + e_{n-2} \times (a_{n-1} - a_{n-2}) + e_{n-1} \times (a_n - a_{n-1})$$

Remarque. Si S est une subdivision régulière, alors $I_e = (e_0 + e_1 + \cdots + e_{n-2} + e_{n-1}) \times \Delta_x$ où $\Delta_x = a_1 - a_0$.

Remarque. La définition précédente est bien la définition d'une aire, par sommation d'aire de rectangles.

4.1.2 Les fonctions positives

On a montré tout à l'heure que les fonctions étagées «encadraient» les fonctions continues, et sans perte de généralités, on peut également supposer qu'elles encadrent les fonctions continues positives.

On a également remarqué que l'intégrale d'une fonction étagée était une aire, comme somme de rectangle.

Ces deux remarques vont nous permettre de définir la notion d'intégrale d'une fonction positive.

Soit f une fonction définie, continue, positive sur $[a, b]$. On note $e_S^{\inf}$ (resp. $e_S^{\sup}$) la fonction étagée sur la subdivision S telle que $\forall x \in I$, $e_S^{\inf}(x) \leq f(x)$ (resp. $e_S^{\sup}(x) \geq f(x)$).

Définition 4.5. On appelle intégrale de f entre a et b l'aire du domaine limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite d'équation $y = 0$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note cette aire :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Avec les notations précédentes,

Proposition 4.6. *Si S est une subdivision de I,*

$$I_{e_S^{\inf}} \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq I_{e_S^{\sup}}$$

Remarque. En prenant des subdivisions de plus en plus fines [1], on construit deux suites adjacentes, ce qui «justifie» la construction.

4.1.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction positive

Proposition 4.7.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

Démonstration. Cela résulte essentiellement de la définition comme aire. □

Proposition 4.8.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Démonstration. Si l'intervalle est réduit à un point, on ne peut pas trouver de subdivision de cet intervalle et donc on ne peut pas tracer de rectangle. □

Proposition 4.9 (Relation de Chasles)**.** *Soient a, et c trois nombres tels que $a < b < c$.*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. Il s'agit de l'extensivité de l'aire. □

1. c'est-à-dire avec plus de points

Proposition 4.10 (Additivité)**.** *Soient f et g deux fonctions définies, continues et positives sur $I = [a, b]$.*

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. Il faut revenir aux encadrements par les fonctions étagées. □

4.2 Généralisation aux fonctions continues

4.2.1 Fonctions négatives

Soit f une fonction négative. Dans ce cas, on définit l'intégrale de la façon suivante : on introduit la fonction g, qui prends comme valeur l'opposé de celle prise par f. La fonction g est positive, on peut donc utiliser la définition en terme d'aire.

Mais n'oublions pas qu'ainsi, nous n'avons pas défini l'intégrale de la fonction f. On peut poser que cette intégrale vaut l'opposé de celle de la fonction g (opposé de f.)

Définition 4.11. Soit f une fonction définie, continue, négative sur $I = [a, b]$.

Posons, pour tout $x \in I$, $g(x) = -f(x)$. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

En écrivant que $g = -f$, on obtient que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque. Si f est la fonction nulle [2], alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Proposition 4.12. *Si f est de signe constant et que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors f est la fonction nulle.*

Démonstration. Dire que l'intégrale est nulle, c'est dire que l'aire limitée par la courbe est nulle, ce qui revient à dire que $\mathcal{C}_f$ est confondue avec la droite d'équation $y = 0$, ce qui équivaut à dire que $f(x) = 0$ pour tout x de I. □

Les propriétés 4.9 et 4.10 s'étendent tout à fait naturellement aux fonctions négatives.

4.2.2 Fonctions de signe quelconque

Soit f une fonction définie et continue sur $I = [a, b]$.

On pose $f^+(x) = f(x)$ si $x \geq 0$ et $f^+(x) = 0$ sinon et $f^-(x) = f(x)$ si $x < 0$ et $f^-(x) = 0$ sinon.

Sous ces notations : $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$.

Proposition 4.13.

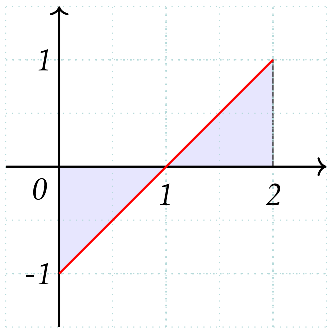
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b -f^-(x)\,\mathrm{d}x$$

2. $f(x) = 0 \forall x \in I$

Démonstration. Il s'agit essentiellement d'utiliser 4.9 et 4.10. □

Remarque. Si f n'est pas de signe constant, on peut avoir $f \not\equiv 0$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Exemple. *Soit f définie par $f(x) = (x-1)$ sur $I = [0,2]$.*



$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -1 + 1 = 0$

4.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue

4.3.1 Relations «vectorielles»

Soit f une fonction définie continue sur $I = [a,b]$.

Proposition 4.14.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Proposition 4.15 (Relation de Chasles)**.** *Soient a, et c trois nombres tels que $a < b < c$.*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition 4.16 (Additivité)**.** *Soient f et g deux fonctions définies, continues et positives sur $I = [a,b]$.*

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. On se ramène au cas des fonctions positives en découpant l'intervalle autant de fois que nécessaire. Puis on utilise 4.9 et 4.10. □

Proposition 4.17 (Multiplication par un scalaire)**.** *Soit λ un scalaire.*

$$\int_a^b \lambda \times f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. Il faut revenir aux fonctions positives puis aux encadrements par des fonctions étagées et considérer la multiplication d'une dimension d'un rectangle par $|\lambda|$, où $|x| = \max(x, -x) \forall x \in \mathbf{R}$ □

Proposition 4.18. *Soit f une fonction définie, continue sur $[a,b]$.*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. Il faut utiliser la relation de Chasles avec a, b et a. □

4.3.2 Inégalités

On démontre d'abord ces propriétés pour des fonctions positives, puis on généralise à l'aide de la relation de Chasles et des relations sur les fonctions (voir les propriétés 4.9 et 4.10.)

Proposition 4.19. *Soit f et g deux fonctions définies et continues sur $[a,b]$, telles que pour tout x de $[a,b]$, $f(x) \leq g(x)$,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. Il suffit d'étudier le signe de $f - g$. □

Proposition 4.20 (inégalité «triangulaire»)**.** *Soit f une fonction définie continue sur $[a,b]$, alors*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. $-f \leq |f|$ et $f \geq |f|$ se propage aux intégrales et on en déduit que $\int |f| \geq \max\left(\int -f, \int f\right) = \left|\int f\right|$. □

4.3.3 Inégalités de la moyenne et valeur moyenne

Proposition 4.21. *Si f est minorée par m, alors*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Proposition 4.22. *Si f est majorée par M, alors*

$$M(b-a) \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. On se sert de la propriété 4.19 avec f et g «bien choisies». □

Définition 4.23. Soit f une fonction définie continue sur $[a,b]$. On définit sa valeur moyenne sur $[a,b]$ par

$$\mu_{[a,b]}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

4.4 Calcul des intégrales

4.4.1 Primitive d'une fonction

Dans cette partie, on va utiliser deux variables nommées t et x, afin de définir une nouvelle fonction, celle qui à une fonction donnée et à une abscisse donnée associe l'aire, c'est à dire l'intégrale.

Définition 4.24. Soit f une fonction définie continue sur $[a,b]$ et $x \in [a,b]$. On définit une primitive de f, généralement notée F par, pour tout $x \in [a,b]$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 4.25. *La fonction F définit ci-dessus est continue sur $[a,b]$*

Proposition 4.26. *Avec la notation précédente, $F(a) = 0$.*
Ainsi, F est définie comme la *primitive de f s'annulant en a.*

Démonstration. On admet ici la continuité de F.
Pour l'unicité, si on suppose que G est également une primitive de f qui s'annule en a, cela conduit à montrer que $F - G$ est l'intégrale de la fonction nulle et donc que $F = G$ □

Théorème 4.27 (théorème fondamental de l'analyse (admis))**.** *Soit f une fonction définie continue sur $[a,b]$, alors toute primitive F de f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $[a,b]$ et on a*

$$F'(x) = f(x)$$

Remarque. On retrouve *a posteriori* que deux primitves F eg G d'une même fonction diffèrent d'une constante.

4.4.2 Détermination d'une primitive

Proposition 4.28. *Si f et g sont deux fonctions, de primitives F et G, alors $f + \lambda g$ a pour primitive $F + \lambda G$*

Démonstration. Cette propriété découlent des proprités de linéarité de l'intégrale. □

Sous réserve de la continuité de f, les primitives se retrouvent par lecture «inverse» du tableau des dérivées.

$f(t)$	$F(t)$	$f(t)$	$F(t)$
$\frac{1}{t}$	$\ln t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$	$\tan t$
e^t	e^t	$\arcsin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
t^α $(\alpha \in \mathbf{R}^*)$	$\frac{1}{\alpha} t^{\alpha+1}$		
$\cos t$	$\sin t$	$\arctan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$\sin t$	$-\cos t$	e^{at} $(a \in \mathbf{R}^*)$	$\frac{1}{a} e^{at}$

4.4.3 Détermination «avancée»

Proposition 4.29. *Soit u une fonction définie, continue, dérivable sur $[a,b]$ et f une fonction définie, continue sur* $[\min(u(a),u(b)),\max(u(a),u(b))]$.
$F(u(x)) = \int_a^x u'(x)f(u(x))\,\mathrm{d}x$ *est une primitive de* $u'f(u)$ *sur* $[a,b]$

Proposition 4.30 (Intégration par parties)**.** *Soient f et g deux fonctions définies, continues,* dérivables *sur* $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

où F et G sont des primitives de f et g.

Démonstration. La formule de dérivation d'un produit s'écrit $(uv)' = u'v + v'u$, ce qui donne rapidement le résultat attendu. ☐

Remarque. On note, de façon générale, $\Big[F(x)\Big]_a^b$ la quantité $F(b) - F(a)$.

4.5 Calcul approché d'une intégrale par diverses méthodes

4.5.1 Méthode des rectangles

4.5.2 Méthode des trapèzes

4.5.3 Méthode de Simpson

Exercice 4.1

Vérifier que F est une primitive de f dans les cas suivants :

- $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4$; $f(x) = x^2 + 4x$
- $F(x) = 2e^x + \frac{1}{2}x^2$; $f(x) = 2e^x + x$

Exercice 4.2

Chercher une primitive des fonctions suivantes :
$f(x) = 3$; $g(x) = 2x + 4$; $h(x) = 3x^2$; $k(x) = 3x^2 + 2x + 4$; $l(x) = 5x^2 - 7x - 3$

Exercice 4.3

Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_{-3}^5 x^2 + 4x\,\mathrm{d}x$
- $\int_0^1 2e^x + x\,\mathrm{d}x$

4.6 On dispose d'une primitive de certaines fonctions

Les formules de dérivations d'une fonction composée (de la forme $f(u(x)$ où f et u sont deux fonctions) nous donnent l'égalité suivante :

$$[f(u)]'(x) = u'(x)f'(u(x))$$

Si toutes les fonctions (f, u, f' et u' sont dérivables, on peut intégrer cette égalité et l'appliquer à certains cas particuliers.

Proposition 4.31. *Soit g, f et u trois fonctions telles que pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $g(x) = u'(x)f(u(x))$.*
Sous ces conditions, G une primitive de g s'écrit

$$G(x) = F(u(x))$$

où F est une primitive de f.

Exemple. ▹ *Intégrer sur* $\mathbf{R}^+$ $f : x \mapsto \dfrac{-2}{(2x+1)^2}$

▹ *Intégrer sur* $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ $g : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$

4.7 Intégration par parties

On suppose désormais que u et v sont deux fonctions dérivables sur I, un intervalle de $\mathbf{R}$. La formule de dérivation d'un produit nous donne $(uv)' = u'v + uv'$, qu'on peut aussi écrire

$$u'v = (uv)' - uv' .$$

Ce qui nous permet d'écrire la propriété suivante :

Proposition 4.32. *Formule d'intégration par parties*
Soit u et v deux fonctions, dérivables sur I

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x) = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)}$$

En pratique, il faut identifier les fonctions u et v. On peut toutefois retenir la règle suivante : pour intégrer le produit d'une fonction polynomiale et d'une exponentielle, on prendra l'exponentielle comme u' et la fonction polynomiale comme v. Ainsi, chaque intégration par parties baissera le degré de la fonction polynomiale et en un nombre fini d'étapes, on obtiendra l'intégrale désirée.

Exemple. ▹ *Calculer* $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

▹ *Calculer* $J = \displaystyle\int_{-1}^1 (x^2+1)e^{2x} dx$

Quelques autres exemples

Exemple. ▹ *Donner une primitive de* $xe^{-\frac{x^2}{2}}$

▹ *Donner une primitive de* $\dfrac{1}{1+x^2}$*, en déduire* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$*. Interpréter géométriquement ce résultat.*

Exercice 4.4

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.
Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$

Exercice 4.5

Pour chacune des intégrales, la calculer puis donner une interprétation géométrique.

1. $\int_{-1}^1 3xe^{-x}\,dx$
2. $\int_0^1 xe^x\,dx$
3. $\int_0^1 (x+2)e^{-x}\,dx$

Exercice 4.6

On souhaite calculer $\int_0^1 (x^2+1)e^{2x}\,dx$

1. Calculer $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$.
2. En déduire $\int_0^1 (x^2+1)e^{2x}\,dx$.

Exercice 4.7

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = x^2\ ,\ g(x) = \frac{1}{x}$$

On considère le domaine $\mathcal{D}$ défini par l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant

$$1 \leq x \leq 2\frac{1}{x} \leq y \leq x^2$$

1. *a*) Tracer dans un même repère orthonormal les courbes représentatives des fonctions f et g.
On prendra 2 cm comme unité.
b) Repasser en rouge la partie des courbes pour les $x \in [1;2]$.

2. Exprimer l'aire de $\mathcal{D}$ comme une différence deux deux aires pouvant être calculées par des intégrales.
3. *a*) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ exprimée en uinité d'aire.
   b) Exprimer cette aire en cm^2. *Arrondir au centième.*